(15)

POLIEDROS REGULARES Y AR-
QUIMEDIANOS
(y construcción del polígono regular de 17 lados (F. GAUSS))
ESTUDIO GEOMÉTRICO - ANALÍTICO

Contribución al estudio de los

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

—

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 1 al 10

(Ver "observaciones para impresión" en Poliedros regulares.

Poliedros arquimedianos

CAPITULO I
Consideraciones generales de existencia

1. Definición

Se denomina poliedro arquimediano, a todo poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares no todos de igual número de lado, y sus ángulos sólidos son iguales o simétricos pero no regulares.

Los poliedros arquimedianos se diferencian de los regulares en que en éstos todas sus caras son polígonos regulares iguales, y en aquéllos puede haber caras formadas por polígonos regulares de distinto número de lados.

Los poliedros arquimedianos se conocen también por el nombre de poliedros semirregulares.

2. Condiciones necesarias para la existencia de un poliedro arquimediano.

La definición de dichos poliedros, implica que:

a) Han de ser poliedros convexos.

b) Sus caras deberán ser polígonos regulares, no todos iguales.

c) Sus ángulos sólidos han de ser todos iguales o simétricos dos a dos.

Vamos a establecer mediante un detallado análisis las condiciones necesarias que ha de cumplir

Pliego de Condiciones

CAPITULO II

Condiciones generales de [illegible]

1. Definiciones

Se denominan [illegible] [illegible] a todo [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] de [illegible] y [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] para su [illegible].

Los [illegible] [illegible] se [illegible] de la [illegible] en que [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] y la [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] de [illegible] [illegible] de [illegible]. Los [illegible] [illegible] se [illegible] [illegible] [illegible] el [illegible] de [illegible] [illegible].

2. Condiciones exigidas para la [illegible] de [illegible] [illegible]

Se [illegible] de [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

a) [illegible] de [illegible] [illegible].

b) Las [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] de [illegible].

c) [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] de [illegible] [illegible] y [illegible] [illegible] de.

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

un poliedro determinado para que se verifiquen las propiedades anteriores.

2.1 Condiciones necesarias para que un poliedro sea convexo.

Recordemos que se denomina poliedro en general, a todo sólido o cuerpo geométrico limitado por un conjunto finito de polígonos planos tales que cada uno de los lados pertenezca a dos de dichos polígonos, y que dos polígonos cualesquiera que tengan un lado común no pertenezcan al mismo plano.

Los polígonos del conjunto se llaman caras del poliedro; los lados de sus caras, aristas; los vértices de sus caras, son también vértices del poliedro; los ángulos internos de sus caras, ángulos planos del poliedro. Los planos de dos caras contiguas forman un ángulo que recibe el nombre de diedro del poliedro.

En cada vértice del poliedro concurren varias aristas y ángulos planos, formando su conjunto una figura geométrica que se denomina ángulo sólido del poliedro.

Un poliedro se llama convexo si al prolongar cualquiera de sus caras queda todo él en la misma región del espacio en que queda dividido por el plano de dicha cara.

En todo poliedro convexo existe pues un cierto mi-

un poliedro determinado para que se cumpla la propiedad enunciada.

2.4 Condiciones necesarias para que un poliedro sea convexo.

Recordemos que la definición (poliedro en general) a toda región o cuerpo geométrico limitado por una cantidad finita de polígonos planos tales que cada uno de los lados pertenezca a dos de dichos polígonos y que dos polígonos consecutivos que tengan un lado común no pertenezcan al mismo plano.

Los polígonos del conjunto se llaman caras del poliedro; los lados de sus caras, aristas; los vértices de sus caras, son también vértices del poliedro; los ángulos interiores de sus caras, ángulos planos del poliedro, y los diedros de dos caras contiguas forman una arista que tienen el nombre de diedros del poliedro.

En cada vértice del poliedro concurren varias caras y ángulos planos, formando un conjunto cuya figura geométrica se denomina ángulo sólido del poliedro.

Un poliedro se llama convexo si el polígono que está en una cara queda todo él en la región del espacio en que queda dividido por el plano de dicha cara.

Si todo poliedro convexo está formado por un número

mero de ángulos sólidos. Por lo tanto, la posibilidad de existencia de un poliedro convexo está supeditada a la posibilidad de existencia de un ángulo sólido convexo.

Esta posibilidad implica las siguientes condiciones necesarias:

1ª condición.- La suma de los ángulos planos internos de las caras que forman un ángulo sólido de un poliedro convexo en cada uno de sus vértices, tiene que ser menor de cuatro rectos.

puesto que si fuese igual a cuatro rectos, el ángulo sólido se transforma en un plano, y si fuese mayor, el ángulo sólido sería cóncavo y por consiguiente también el poliedro.

2ª condición.- El mayor ángulo plano interno de todas las caras que forman un ángulo sólido de un poliedro convexo ha de ser menor que la suma de los ángulos planos internos de las caras restantes.

ya que si dicho ángulo es igual a la suma de los restantes ángulos, el ángulo sólido se transforma en un plano, y si fuese mayor, no podría cerrarse espacio con los ángulos de todas sus caras.

nes de ángulos sólidos. De lo visto, la posibilidad de existencia de un poliedro convexo está supeditada a la posibilidad de existencia de un ángulo sólido convexo.

Esta posibilidad implica las siguientes condiciones necesarias:

1ª condición - La suma de los ángulos planos interiores de las caras que forman un ángulo sólido de un poliedro convexo — en cada uno de sus vértices, tiene que ser menor de cuatro rectos,

puesto que si fuese igual a cuatro rectos, el ángulo sólido se transformaría en un plano, y si fuese mayor, el ángulo sólido sería cóncavo y por consiguiente también el poliedro.

2ª condición. - El mayor ángulo plano interior de todas las caras que forman un ángulo sólido de un poliedro convexo — ha de ser menor que la suma de los ángulos planos interiores de las caras restantes.

Ya que si dicho ángulo es igual a la suma de los restantes ángulos, el ángulo sólido se transformaría en un plano, y si fuese mayor, no podrían cerrarse entre sí los ángulos de todas sus caras.

2.2 Condiciones necesarias para que un poliedro convexo tenga sus caras formadas por polígonos regulares, no todos iguales.

La posibilidad de existencia de poliedros convexos con caras poligonales regulares, no todas iguales, se estudia partiendo de los ángulos sólidos que se puedan formar acoplando polígonos regulares alrededor de un vértice, y que cumplan las condiciones 1ª y 2ª.

En primer lugar podemos observar que si fuesen todas las caras polígonos regulares diferentes, no se podría construir un ángulo sólido con un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular y un exágono regular, ya que la suma de sus ángulos sería $60° + 90° + 108° + 120° = 378° > 360°$ (cond. 1ª), y si fuesen todas las caras iguales sólo podría existir un ángulo sólido con menos de seis triángulos equiláteros, ya que $6 \times 60° = 360°$ (cond. 1ª), lo cual limita a cinco el número máximo de caras ($c = 5$), y a solo tres el de tipos diferentes de polígonos regulares. Por consiguiente:

3ª condición. – El ángulo sólido de un poliedro arquimediano puede ser triedro, tetraedro o pentaedro.

4ª condición.- En el ángulo sólido de un poliedro arquimediano solo existirán como máximo tres caras distintas (o polígonos regulares).

2.3 Casos posibles de ángulos sólidos formados por caras regulares, no todas iguales.

Vamos a establecer de forma exhaustiva los posibles casos de polígonos regulares que puedan formar un ángulo sólido cumpliendo las condiciones 1ª a 4ª establecidas en los anteriores párrafos 2.1 y 2.2.

Para ello consideremos sucesivamente ángulos sólidos de cinco, cuatro y tres caras que son los solo posibles (condición 3ª) y en cada uno de ellos estudiemos progresivamente los que surjan cuando la suma de ángulos planos de sus caras vayan siendo monótonamente crecientes, comenzando por el de menor suma. De esta forma agotaremos todos los casos posibles. (en tinta roja señalaremos las condiciones cumplidas en cada caso).

Recordemos previamente que el ángulo plano interno α de un polígono regular, o sea el formado por dos lados consecutivos, tiene por valor, en grados sexagesimales

$$\alpha = 180^\circ \times \frac{n-2}{n} \qquad (n>2)$$

Llamemos $P_3,\ P_4,\ P_5 \ldots P_n$ a un polígono regular de $3,\ 4,\ 5 \ldots n$ lados, y por consiguiente también

de $\widehat{n}$ vértices, siendo $\widehat{n}$ entero y mayor de 2.

2.31 Casos posibles de ángulos sólidos formados por cinco caras regulares, no todas iguales.

1 $4\,P_3 + 1\,P_4$ (3ª y 4ª)

$$4 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{2}{4} = 330^\circ < 360^\circ \quad (1^a)$$

$$\alpha_4 = 180^\circ \times \frac{2}{4} = 90^\circ < 4\,\alpha_3 = 4 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} = 240^\circ \quad (2^a)$$

---

2 $4\,P_3 + 1\,P_5$ (3ª y 4ª)

$$4 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{3}{5} = 348^\circ < 360^\circ \quad (1^a)$$

$$\alpha_5 = 180^\circ \times \frac{3}{5} = 108^\circ < 4\,\alpha_3 = 4 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} = 240^\circ \quad (2^a)$$

$4\,P_3 + 1\,P_n$, siendo $n > 5$, no cumplen ya la condición 1ª

Igualmente $3\,P_3 + 2\,P_n$, siendo $n > 3$, tampoco cumplen la condición 1ª

2.32 <u>Casos posibles de ángulos sólidos formados por cuatro caras regulares, no todas iguales.</u>

3 $3P_3 + 1P_n$ $3 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{n-2}{n} = 360^\circ \times \frac{n-2}{n} < 360^\circ$ (1ª)

(3ª y 4ª)

(∞ soluciones) $\alpha_n = 180^\circ \times \frac{n-2}{n} < 3\alpha_3 = 180^\circ$ $(n > 3)$ (2ª)

---

4 $2P_3 + 2P_4$ $2 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 2 \times 180^\circ \times \frac{2}{4} = 300^\circ < 360^\circ$ (1ª)

(3ª y 4ª)

$\alpha_4 < 2\alpha_3 + \alpha_4$ (2ª)

---

5 $2P_3 + 1P_4 + 1P_5$ $2 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{2}{4} + 180^\circ \times \frac{3}{5} = 180^\circ \times \frac{53}{30} = 318^\circ < 360^\circ$ (1ª)

(3ª y 4ª)

$\alpha_5 = 180^\circ \times \frac{3}{5} = 108^\circ < 2\alpha_3 + \alpha_4 = 2 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{2}{4} = 210^\circ$ (2ª)

hasta ↓ hasta ↓

11 $2P_3 + 1P_4 + 1P_{11}$ $2 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{2}{4} + 180^\circ \times \frac{9}{11} = 180^\circ \times \frac{131}{66} \cong 358^\circ < 360^\circ$ (1ª)

(3ª y 4ª)

$2P_3 + 1P_4 + 1P_n$ siendo $n > 11$ no cumple ya la condición 1ª

---

12 $2P_3 + 2P_5$ $2 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 2 \times 180^\circ \times \frac{3}{5} = 336^\circ < 360^\circ$ (1ª)

(3ª y 4ª)

$\alpha_5 < 2\alpha_3 + \alpha_5$ (2ª)

---

13 $2P_3 + 1P_5 + 1P_6$ $2 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{3}{5} + 180^\circ \times \frac{4}{6} = 348^\circ < 360^\circ$ (1ª)

(3ª y 4ª)

$\alpha_6 = 180^\circ \times \frac{4}{6} = 120^\circ < 2\alpha_3 + \alpha_5 = 2 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{3}{5} = 228^\circ$ (2ª)

---

14 $2P_3 + 1P_5 + 1P_7$ $2 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{3}{5} + 180^\circ \times \frac{5}{7} \cong 357^\circ < 360^\circ$ (1ª)

(3ª y 4ª)

$\alpha_7 = 180 \times \frac{5}{7} \cong 129^\circ < 2\alpha_3 + \alpha_5 = 2 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{3}{5} = 228^\circ$ (2ª)

$2P_3 + 1P_5 + 1P_n$ siendo $n > 7$ no cumple ya la condición 1ª

---

15 $1P_3 + 3P_4$ $180^\circ \times \frac{1}{3} + 3 \times 180^\circ \times \frac{2}{4} = 330^\circ < 360^\circ$ (1ª)

(3ª y 4ª) $\alpha_4 < \alpha_3 + 2\alpha_4$ (2ª)

---

16 $1P_3 + 2P_4 + 1P_5$ $180^\circ \times \frac{1}{3} + 2 \times 180^\circ \times \frac{2}{4} + 180^\circ \times \frac{3}{5} = 348^\circ < 360^\circ$ (1ª)

(3ª y 4ª) $\alpha_5 = 180^\circ \times \frac{3}{5} = 108^\circ < 1\alpha_3 + 2\alpha_4 = 240^\circ$ (2ª)

$1P_3 + 2P_4 + 1P_n$ siendo $n > 5$ no cumple ya la condición 1ª
y $1P_3 + 1P_4 + 2P_n$ siendo $n > 4$ tampoco

2.33 Casos posibles de ángulos sólidos formados por tres caras regulares, no todas iguales.

17 $2P_3 + 1P_4$ $2 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{2}{4} = 210^\circ < 360^\circ$ (1ª)

(3ª y 4ª) $\alpha_4 = 90^\circ < 2\alpha_3 = 120^\circ$ (2ª)

---

18 $2P_3 + 1P_5$ $2 \times 180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{3}{5} = 228^\circ < 360^\circ$ (1ª)

(3ª y 4ª) $\alpha_5 = 108^\circ < 2\alpha_3 = 120^\circ$ (2ª)

$2P_3 + 1P_n$ siendo $n > 5$ no cumple ya la condición 2ª

19 $1P_3 + 2P_4$ $180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{2}{4} = 240° < 360°$ (1ª)

(3ª y 4ª) $\alpha_4 < \alpha_3 + \alpha_4$ (2ª)

---

20 $1P_3 + 1P_4 + 1P_5$ $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{3}{5} = 258° < 360°$ (1ª)

(3ª y 4ª) $\alpha_5 = 108° < \alpha_3 + \alpha_4 = 150°$ (2ª)

hasta ↓ hasta ↓

26 $1P_3 + 1P_4 + 1P_{11}$ $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{9}{11} \cong 298° < 360°$ (1ª)

(3ª y 4ª) $\alpha_{11} = 180° \times \frac{9}{11} \cong 148° < \alpha_3 + \alpha_4 = 150°$ (2ª)

$1P_3 + 1P_4 + 1P_n$ siendo $n > 11$ no cumple ya la condición 2ª

---

27 $1P_3 + 2P_5$ $180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{3}{5} = 276° < 360°$ (1ª)

(3ª y 4ª) $\alpha_5 < \alpha_3 + \alpha_5$ (2ª)

---

28 $1P_3 + 1P_5 + 1P_6$ $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{3}{5} + 180° \times \frac{4}{6} = 288° < 360°$ (1ª)

(3ª y 4ª) $\alpha_6 = 120° < \alpha_3 + \alpha_5 = 60° + 105° = 165°$ (2ª)

hasta ↓ hasta ↓

51 $1P_3 + 1P_5 + 1P_{29}$ $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{3}{5} + 180° \times \frac{27}{29} \cong 336° < 360°$ (1ª)

$\alpha_{29} \cong 167° \lessapprox \alpha_3 + \alpha_5 = 60° + 108° = 168°$ (2ª)

$1P_3 + 1P_5 + 1P_{30}$ no cumple ya la condición 2ª

52 $1P_3 + 2P_6$ (3ª y 4ª)

$$180^\circ \times \frac{1}{3} + 2 \times 180^\circ \times \frac{4}{6} = 300^\circ < 360^\circ \qquad (1^a)$$

$$\alpha_6 < \alpha_3 + \alpha_6 \qquad (2^a)$$

---

53 $1P_3 + 1P_6 + 1P_n$ (3ª y 4ª)

(∞ soluciones)

$$180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{4}{6} + 180^\circ \times \frac{n-2}{n} = 180^\circ + 180^\circ \times \frac{n-2}{n} < 360^\circ \qquad (1^a)$$

$$\alpha_n = 180^\circ \times \frac{n-2}{n} < \alpha_3 + \alpha_6 = 180^\circ \qquad (2^a)$$

$(n > 6)$

---

54 $1P_3 + 2P_7$ (3ª y 4ª)

$$180^\circ \times \frac{1}{3} + 2 \times 180^\circ \times \frac{5}{7} \cong 318^\circ < 360^\circ \qquad (1^a)$$

$$\alpha_7 < \alpha_3 + \alpha_7 \qquad (2^a)$$

---

55 $1P_3 + 1P_7 + 1P_8$ (3ª y 4ª)

$$180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{5}{7} + 180^\circ \times \frac{6}{8} \cong 324 < 360^\circ \qquad (1^a)$$

$$\alpha_8 = 180^\circ \times \frac{6}{8} = 135^\circ < \alpha_3 + \alpha_7 = 60^\circ + 127^\circ = 187^\circ \qquad (2^a)$$

↓ hasta ↓ — ↓ hasta ↓

88 $1P_3 + 1P_7 + 1P_{41}$ (3ª y 4ª)

$$180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{5}{7} + 180^\circ \times \frac{39}{41} \cong 359{,}8 < 360^\circ \qquad (1^a)$$

$$\alpha_{41} = 180^\circ \times \frac{39}{41} \cong 172^\circ < \alpha_3 + \alpha_7 \cong 188^\circ \qquad (2^a)$$

$1P_3 + 1P_7 + 1P_{42}$ no cumple ya la condición 1ª

---

89 $1P_3 + 2P_8$ (3ª y 4ª)

$$180^\circ \times \frac{1}{3} + 2 \times 180^\circ \times \frac{6}{8} = 330^\circ < 360^\circ \qquad (1^a)$$

$$\alpha_8 < \alpha_3 + \alpha_8 \qquad (2^a)$$

UNE A4 210 X 297

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 11 al 20

90 $1P_3 + 1P_8 + 1P_9$ (3ª y 4ª) — $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{6}{8} + 180° \times \frac{7}{9} = 335° < 360$ (1ª)

hasta — hasta — $\alpha_9 = 140° < \alpha_3 + \alpha_8 = 195°$ (2ª)

104 $1P_3 + 1P_8 + 1P_{23}$ — $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{6}{8} + 180° \times \frac{21}{23} \cong 359{,}4° < 360°$ (1ª)

$\alpha_{23} \cong 164° < \alpha_3 + \alpha_8 = 60 + 135 = 195°$ (2ª)

$1P_3 + 1P_8 + 1P_{24}$ no cumple ya la condición 1ª

---

105 $1P_3 + 2P_9$ (3ª y 4ª) — $180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{7}{9} = 340° < 360°$ (1ª)

$\alpha_9 < \alpha_3 + \alpha_9$ (2ª)

---

106 $1P_3 + 1P_9 + 1P_{10}$ (3ª y 4ª) — $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{7}{9} + 180° \times \frac{8}{10} = 344° < 360°$ (1ª)

hasta — hasta — $\alpha_{10} = 144° < \alpha_3 + \alpha_9 = 200°$ (2ª)

113 $1P_3 + 1P_9 + 1P_{17}$ — $180° \times \frac{1}{3} + 180° \times \frac{7}{9} + 180° \times \frac{15}{17} \cong 359° < 360°$ (1ª)

$\alpha_{17} \cong 159° < \alpha_3 + \alpha_9 = 200°$ (2ª)

$1P_3 + 1P_9 + 1P_{18}$ no cumple ya la condición 1ª

---

114 $1P_3 + 2P_{10}$ (3ª y 4ª) — $180° \times \frac{1}{3} + 2 \times 180° \times \frac{8}{10} = 348° < 360°$ (1ª)

$\alpha_{10} < \alpha_3 + \alpha_{10}$ (2ª)

---

115 hasta 118: $1P_3 + 1P_{10} + 1P_{11}$ hasta $1P_3 + 1P_{10} + 1P_{14}$ (3ª y 4ª)

115 — $1P_3 + 1P_{10} + 1P_{11}$

$180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{8}{10} + 180^\circ \times \frac{9}{11} \cong 352^\circ < 360^\circ$ (1ª)

$\alpha_{11} \cong 148^\circ < \alpha_3 + \alpha_{10} = 204^\circ$ (2ª)

118 — $1P_3 + 1P_{10} + 1P_{14}$

$180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{8}{10} + 180^\circ \times \frac{12}{14} \cong 357^\circ < 360^\circ$ (1ª)

$\alpha_{14} \cong 155^\circ < \alpha_3 + \alpha_{10} = 204^\circ$ (2ª)

$1P_3 + 1P_{10} + 1P_{15}$ no cumple ya la condición 1ª

---

119 — $1P_3 + 2P_{11}$ (3ª y 4ª)

$180^\circ \times \frac{1}{3} + 2 \times 180^\circ \times \frac{9}{11} \cong 355^\circ < 360^\circ$ (1ª)

$\alpha_{11} < \alpha_3 + \alpha_{11}$ (2ª)

---

120 — $1P_3 + 1P_{11} + 1P_{12}$ (3ª y 4ª)

$180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{9}{11} + 180^\circ \times \frac{10}{12} \cong 358^\circ < 360^\circ$ (1ª)

$\alpha_{12} = 150^\circ < \alpha_3 + \alpha_{11} = 60^\circ + 147 = 207^\circ$ (2ª)

---

121 — $1P_3 + 1P_{11} + 1P_{13}$ (3ª y 4ª)

$180^\circ \times \frac{1}{3} + 180^\circ \times \frac{9}{11} + 180^\circ \times \frac{11}{13} \cong 359{,}6^\circ < 360^\circ$ (1ª)

$\alpha_{13} \cong 151^\circ < \alpha_3 + \alpha_{11} = 207^\circ$ (2ª)

$1P_3 + 1P_{11} + 1P_{14}$ no cumple ya la condición 1ª
y $1P_3 + 2P_{12}$ tampoco

---

122 — $2P_4 + 1P_n$ (3ª y 4ª)

$2 \times 180^\circ \times \frac{2}{4} + 180^\circ \times \frac{n-2}{n} = 180^\circ + 180^\circ \frac{n-2}{n} < 360^\circ$ (1ª)

$\alpha_n = 180^\circ \times \frac{n-2}{n} < 2\alpha_4 = 180^\circ$ (2ª)

(∞ soluciones) $(n > 4)$

---

123 $1P_4 + 2P_5$ (3ª y 4ª)

$180° \times \frac{2}{4} + 2 \times 180° \times \frac{3}{5} = 306° < 360°$ (1ª)

$\alpha_5 < \alpha_4 + \alpha_5$ (2ª)

---

124 $1P_4 + 1P_5 + 1P_6$ (3ª y 4ª)

$180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{3}{5} + 180° \times \frac{4}{6} = 318° < 360°$ (1ª)

$\alpha_6 = 120° < \alpha_4 + \alpha_5 = 198°$ (2ª)

hasta hasta

137 $1P_4 + 1P_5 + 1P_{19}$ (3ª y 4ª)

$180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{3}{5} + 180° \times \frac{17}{19} \cong 359{,}1° < 360°$ (1ª)

$\alpha_{19} \cong 162° < \alpha_4 + \alpha_5 = 198°$ (2ª)

$1P_4 + 1P_5 + 1P_{20}$ no cumple ya la condición 1ª

---

138 $1P_4 + 2P_6$ (3ª y 4ª)

$180° \times \frac{2}{4} + 2 \times 180° \times \frac{4}{6} = 330° < 360°$ (1ª)

$\alpha_6 < \alpha_4 + \alpha_6$ (2ª)

---

139 $1P_4 + 1P_6 + 1P_7$ (3ª y 4ª)

$180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{4}{6} + 180° \times \frac{5}{7} \cong 339° < 360°$ (1ª)

$\alpha_7 \cong 129° < \alpha_4 + \alpha_6 = 210°$ (2ª)

hasta hasta

143 $1P_4 + 1P_6 + 1P_{11}$ (3ª y 4ª)

$180° \times \frac{2}{4} + 180° \times \frac{4}{6} + 180° \times \frac{9}{11} \cong 358° < 360°$ (1ª)

$\alpha_{11} = 148° < \alpha_4 + \alpha_6 = 210°$ (2ª)

$1P_4 + 1P_6 + 1P_{12}$ no cumple ya la condición 1ª

---

144 $1\,P_4 + 2\,P_7$ (3ª y 4ª)

$180^\circ \times \frac{2}{4} + 2 \times 180^\circ \times \frac{5}{7} \cong 348^\circ < 360^\circ$ (1ª)

$\alpha_7 < \alpha_4 + \alpha_7$ (2ª)

---

145 $1\,P_4 + 1\,P_7 + 1\,P_8$ (3ª y 4ª)

$180^\circ \times \frac{2}{4} + 180^\circ \times \frac{5}{7} + 180^\circ \times \frac{6}{4} \cong 354^\circ < 360^\circ$ (1ª)

y

$\alpha_8 = 135^\circ < \alpha_4 + \alpha_7 \cong 90^\circ + 128^\circ = 218^\circ$ (2ª)

146 $1\,P_4 + 1\,P_7 + 1\,P_9$ (3ª y 4ª)

$180^\circ \times \frac{2}{4} + 180^\circ \times \frac{5}{7} + 180^\circ \times \frac{7}{9} \cong 359^\circ < 360^\circ$ (1ª)

$\alpha_9 = 140^\circ < \alpha_4 + \alpha_7 \cong 218^\circ$ (2ª)

$1\,P_4 + 1\,P_7 + 1\,P_{10}$ no cumple ya la condición 1ª

$1\,P_4 + 2\,P_8$ y $1\,P_4 + 1\,P_8 + 1\,P_n$ $(n > 8)$ no cumplen la condic. 1ª

---

147 $2\,P_5 + 1\,P_6$ (3ª y 4ª)

$2 \times 180^\circ \times \frac{3}{5} + 180^\circ \times \frac{4}{6} = 336^\circ < 360^\circ$ (1ª)

$\alpha_6 = 120^\circ < 2\,\alpha_5 = 216^\circ$ (2ª)

hasta

150 $2\,P_5 + 1\,P_9$ (3ª y 4ª)

$2 \times 180^\circ \times \frac{3}{5} + 180^\circ \times \frac{7}{9} = 356^\circ < 360^\circ$ (1ª)

$\alpha_9 = 140^\circ < 2\,\alpha_5 = 216^\circ$ (2ª)

$2\,P_5 + 1\,P_{10}$ no cumple ya la condición 1ª

---

151 $1\,P_5 + 2\,P_6$ (3ª y 4ª)

$180^\circ \times \frac{3}{5} + 2 \times 180^\circ \times \frac{4}{6} = 348^\circ < 360^\circ$ (1ª)

$\alpha_6 < \alpha_5 + \alpha_6$ (2ª)

---

152 $1P_5 + 1P_6 + 1P_7$ $180^\circ \times \frac{3}{5} + 180^\circ \times \frac{4}{6} + 180^\circ \times \frac{5}{7} \cong 357^\circ < 360^\circ$ (1ª)

(3ª y 4ª)

$\alpha_7 \cong 129^\circ < \alpha_5 + \alpha_6 = 228^\circ$ (2ª)

$1P_5 + 1P_6 + 1P_8$ no cumple ya la condición 1ª

$1P_5 + 2P_7$ y $1P_5 + 1P_7 + 1P_n$ $(n > 8)$ no cumplen la condición 1ª

Como resumen del estudio de los casos posibles de ángulos sólidos formados por caras regulares, obtenemos los siguientes resultados.

A	Angulos sólidos de 5 caras	Casos 1 y 2	=	2
B	Angulos sólidos de 4 caras	Casos 3 al 16	=	14
C	Angulos sólidos de 3 caras	Casos 17 al 152	=	136
		Total	–	152

Los casos nºs 3 $\quad 3P_3 + 1P_n \quad (n > 3)$

53 $\quad 1P_3 + 1P_6 + 1P_n \quad (n > 6)$

122 $\quad 2P_4 + 1P_n \quad (n > 4)$

admiten infinitas soluciones cada uno.

UNE A4 210 X 297

2.4 Relaciones métricas que han de cumplir las caras, vértices y aristas de un poliedro arquimediano.

Llamamos $\widehat{C_a}$ al número total de caras iguales de un poliedro arquimediano, de $\hat{a}$ lados cada una; $\widehat{C_b}$ al total de caras iguales de $\hat{b}$ lados (distintas de $\widehat{C_a}$) y $\widehat{C_c}$ al total de caras iguales de $\hat{c}$ lados (distintas de $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$). Según la condición 4ª del párrafo 2.2 estas son las máximas posibilidades.

Al mismo tiempo denominaremos $\widehat{n_a}$ al número de caras de $\hat{a}$ lados que concurren en un vértice cualquiera (son todos iguales o simétricos); $\widehat{n_b}$ al número de caras de $\hat{b}$ lados y $\widehat{n_c}$ al de $\hat{c}$ lados, todas concurrentes en el mismo vértice.

Según la condición 3ª del párrafo 2.2, deberá verificarse

$$3 \leqq n_a + n_b + n_c \leqq 5 \qquad [1]$$

Por otra parte, si designamos por $\hat{C}$ al número total de caras del poliedro arquimediano (polígonos regulares no todos iguales), por $\hat{V}$ al número total de vértices (ángulos sólidos iguales o simétricos) y por $\hat{A}$ el número total de aristas (todas iguales), se verificará

$$C = C_a + C_b + C_c \qquad [2]$$

Tengamos también presente el conocido "Teorema de Euler" para los poliedros convexos que relaciona C, V y A de la siguiente forma

$$C + V = A + 2 \qquad [3]$$

Siendo cada arista común a dos caras contiguas, la suma de los productos $a C_a + b C_b + c C_b$ será igual al doble de las aristas del poliedro arquimediano, por lo que se verificará que

$$\frac{1}{2} \left(a C_a + b C_b + c C_c \right) = A \qquad [4]$$

Considerando que en cada vértice de un poliedro arquimediano concurren un número $\hat{n}$ de caras igual al de aristas, o sea una arista por cada cara concurrente, si $\hat{n}_a$ es el número de caras de $\hat{a}$ lados que concurren en dicho vértice, el producto $\widehat{n_a V}$ nos representará el número total de aristas de las caras de $\hat{a}$ lados que concurren en el total de vértices del poliedro.

Por otra parte, como cada cara de $\hat{a}$ lados tiene a su vez $\hat{a}$ vértices, el producto del total C_a de las caras de este tipo que forman dicho poliedro arquimediano por el número de sus lados $\hat{a}$, o sea $\widehat{a C_a}$, nos representará igualmente el total de aristas de las caras de $\hat{a}$ lados que concurren en el total de vértices del poliedro.

En consiguiente se verificará para las caras regulares de $\hat{a}$ lados que

$$a\, C_a = n_a\, V \qquad [5]$$

Razonando igualmente para las caras regulares de $\hat{b}$ lados, tendremos a su vez

$$b\, C_b = n_b\, V \qquad [6]$$

y para las de $\hat{c}$ lados (si existen)

$$c\, C_c = n_c\, V \qquad [7]$$

debiendo verificarse que las sumas

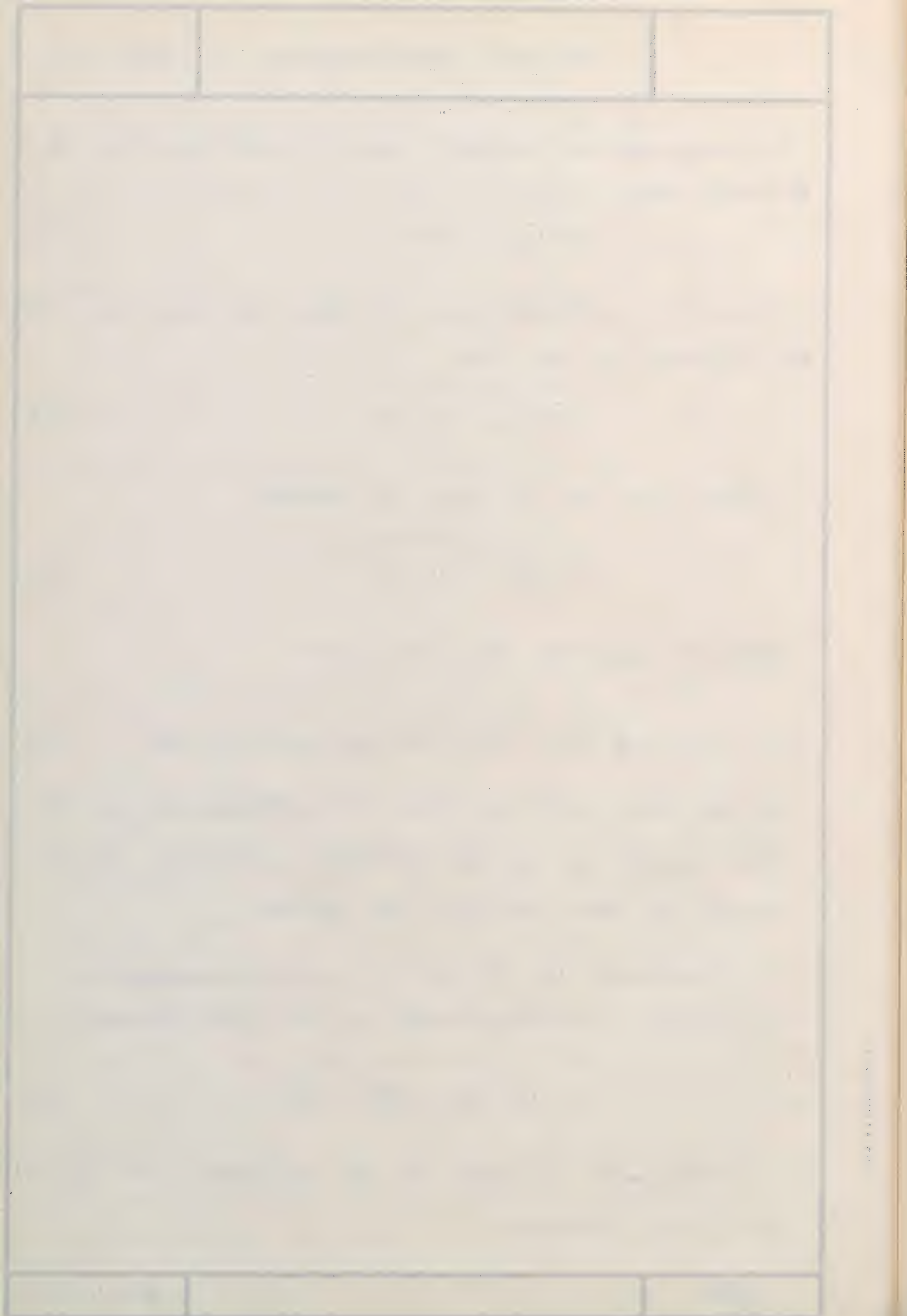
$$a\, C_a + b\, C_b + c\, C_c = V\left(n_a + n_b + n_c\right) = 2A \qquad [8]$$

ya que cada arista pertenece simultáneamente a dos caras contiguas y sus extremos pertenecen igualmente a dos vértices del poliedro

Despejando C_a, C_b y C_c en las igualdades [5], [6] y [7], y sustituyéndolas en la [2], tendremos

$$C = V\left(\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} + \frac{n_c}{c}\right) \qquad [9]$$

Sustituyendo los valores de las igualdades [5], [6] y [7] en la [4], tendremos



$$A = \frac{V}{2} \left(n_a + n_b + n_c \right) \qquad [10]$$

Finalmente, sustituyendo los valores de $\hat{C}$ y $\hat{A}$ obtenidos en [9] y [10], en la igualdad [3], tendremos

$$V \left(\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} + \frac{n_c}{c} \right) + V = \frac{V}{2} \left(n_a + n_b + n_c \right) + 2$$

de la cual, despejando V, será

$$V = \frac{4\,abc}{2ab\,n_c + 2c\,(a\,n_b + b\,n_a) + abc\,(2 - n_a - n_b - n_c)} \qquad [11]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$V \left(\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} + \frac{n_c}{c} \right) + V = \frac{V}{2} \left(n_a + n_b + n_c \right) + 2$$

$$V \left[\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} + \frac{n_c}{c} + 1 - \frac{n_a}{2} - \frac{n_b}{2} - \frac{n_c}{2} \right] = 2$$

$$V = \frac{2}{\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} + \frac{n_c}{c} + 1 - \frac{n_a}{2} - \frac{n_b}{2} - \frac{n_c}{2}} =$$

$$= \frac{4\,abc}{2bc\,n_a + 2ac\,n_b + 2ab\,n_c + 2abc - abc\,n_a - abc\,n_b - abc\,n_c} =$$

$$= \frac{4\,abc}{2ab\,n_c + 2c\,(a\,n_b + b\,n_a) + abc\,(2 - n_a - n_b - n_c)}$$

UNE A4 210 X 297

Si para simplificar hacemos

$$\Delta = 2abn_c + 2c(an_b + bn_a) + abc(2 - n_a - n_b - n_c) \qquad [12]$$

tendremos finalmente

$$V = \frac{4abc}{\Delta} \qquad [13]$$

valor que sustituido en [5], [6] y [7], nos da

$$C_a = \frac{n_a}{a} \cdot V = \frac{4bcn_a}{\Delta} \qquad [14]$$

así como

$$C_b = \frac{n_b}{b} V = \frac{4acn_b}{\Delta} \qquad [15]$$

y también

$$C_c = \frac{n_c}{c} V = \frac{4abn_c}{\Delta} \qquad [16]$$

Las fórmulas [13], [14], [15] y [16], junto con la [12] así como la [3] son las fundamentales que han de emplearse para determinar el número de caras y clases de ellas, el de vértices y el de aristas de todo poliedro arquimediano, debiendo ser sus soluciones números enteros.

Dichas fórmulas han sido deducidas para el caso general de que en un vértice del poliedro concurran tres polígonos regulares diferentes (condición 2ª) de $\widehat{a}$, $\widehat{b}$

UNE A4 210 X 297

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 21 al 30

y $\widehat{c}$ lados. Si solo concurriesen dos polígonos regulares diferentes de $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ lados respectivamente, dichas fórmulas quedarían simplificadas como sigue, ya que al suprimir el valor $\widehat{c}$ de ellas, $\widehat{n_c}$ se hace igual a cero.

La fórmula [12] se transformaría en

$$\Delta' = 2\,(a\,n_b + b\,n_a) + ab\,(2 - n_a - n_b) \qquad [17]$$

la [13], en

$$V = \frac{4\,a\,b}{\Delta'} \qquad [18]$$

la [14] en

$$C_a = \frac{4\,b\,n_a}{\Delta'} \qquad [19]$$

la [15] en

$$C_b = \frac{4\,a\,n_b}{\Delta'} \qquad [20]$$

y la [16] no ha lugar, por no existir caras C_c

Como resumen de lo expuesto en este párrafo hacemos destacar que las fórmulas [12] a [16] y [17] a [20] establecen las relaciones métricas que han de cumplir las caras, vértices y aristas de todo poliedro arquimediano, y por consiguiente fijan condiciones necesarias para la determinación de los mismos, puesto que sus soluciones han de ser siempre números enteros.

Así pues, de forma explícita establecemos la siguiente condición necesaria para la existencia de poliedros arquimedianos.

5ª condición: El número de caras, vértices y aristas de todo poliedro arquimediano han de ser soluciones enteras de las siguientes ecuaciones:

A) Para el caso de que en cada uno de sus vértices concurran tres caras regulares diferentes de $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, y $\widehat{c}$ lados respectivamente, siendo $\widehat{n_a}$, $\widehat{n_b}$ y $\widehat{n_c}$ el número de cada una de ellas:

$$\Delta = 2ab\,n_c + 2c(a\,n_b + b\,n_a) + abc\,(2 - n_a - n_b - n_c) \qquad (I)$$

$$V = \frac{4abc}{\Delta} \qquad (II)$$

$$C_a = \frac{4bc\,n_a}{\Delta} \qquad (III)$$

$$C_b = \frac{4ac\,n_b}{\Delta} \qquad (IV)$$

$$C_c = \frac{4ab\,n_c}{\Delta} \qquad (V)$$

B) Para el caso de que en cada uno de sus vértices concurran dos caras regulares diferentes, de $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ lados respectivamente, siendo $\widehat{n_a}$ y $\widehat{n_c}$ el número de cada una de ellas:

$$\Delta' = 2\,(a\,n_b + b\,n_a) + ab\,(2 - n_a - n_b) \qquad (VI)$$

$$V = \frac{4ab}{\Delta'} \qquad (VII)$$

$$C_a = \frac{4\,b\,n_a}{\Delta'} \qquad (VIII)$$

$$C_b = \frac{4\,a\,n_b}{\Delta'} \qquad (IX)$$

2.5 Casos posibles de poliedros arquimedianos cuyos ángulos sólidos están formados por caras regulares, no todas iguales.

La condición 5ª, establecida en el anterior párrafo 2.4 nos va ha servir para limitar las posibles soluciones estudiadas en el párrafo 2.3, eliminando de estas últimas las que no cumplan dicha condición 5ª.

Estudiaremos esta selección siguiendo el mismo orden de los casos posibles planteados en los párrafos 2.31 a 2.33.

2.51 Casos posibles de poliedros arquimedianos con cinco caras regulares, no todas iguales.

1    $4P_3 + 1P_4$ $P_3\ (a = 3;\ n_a = 4)$ $P_4\ (b = 4;\ n_b = 1)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 1 + 4 \times 4) + 3 \times 4\,(2 - 4 - 1) = 2$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 4 : 2 = 24$

(VIII) $C_3 = 4 \times 4 \times 4 : 2 = 32$

(IX) $C_4 = 4 \times 3 \times 1 : 2 = 6$

$C = 32 + 6 = 38 \quad V = 24 \quad A = 60$ Caso posible

---

2 $\boxed{4\,P_3 + 1\,P_5}$ $P_3\ (a = 3;\ n_a = 4)$ $P_5\ (b = 5;\ n_b = 1)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 1 + 5 \times 4) + 3 \times 5 \times (2 - 4 - 1) = 1$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 5 : 1 = 60$

(VIII) $C_3 = 4 \times 5 \times 4 : 1 = 80$

(IX) $C_5 = 4 \times 3 \times 1 : 1 = 12$

$C = 80 + 12 = 92 \quad V = 60 \quad A = 150$ Caso posible

2.52 Casos posibles de poliedros arquimedianos con cuatro caras regulares, no todas iguales

3 $\boxed{3\,P_3 + 1\,P_n\ (3 < n < \infty)}$ $P_3\ (a = 3;\ n_a = 3)$ $P_n\ (b = n;\ n_b = 1)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 1 + n \times 3) + 3 \times n \times (2 - 3 - 1) = 6$ (para cualquier valor de n).

(VII) $V = 4 \times 3 \times n : 6 = 2n$

(VIII) $C_3 = 4 \times n \times 3 : 6 = 2n$

(IX) $C_n = 4 \times 3 \times 1 : 6 = 2$

$C = 2n + 2 = 2\,(n+1) \quad V = 2n \quad A = 4n$ Caso posible

Este caso es siempre posible para cualquier valor de $n > 3$; por consiguiente presenta infinitas posibilidades.

---

4 $\boxed{2P_3 + 2P_4}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=2)$ $P_4\ (b=4;\ n_b=2)$

(VI) $\Delta' = 2\times(3\times2+4\times2)+3\times4\times(2-2-2)=4$

(VII) $V = 4\times3\times4 : 4 = 12$

(VIII) $C_3 = 4\times4\times2 : 4 = 8$

(IX) $C_4 = 4\times3\times2 : 4 = 6$

$C = 8+6 = 14$ $V = 12$ $A = 24$ Caso posible

---

5 $\boxed{2P_3 + 1P_4 + 1P_5}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=2)$ $P_4\ (b=4;\ n_b=1)$ $P_5\ (c=5;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times4\times1+2\times5\times(3\times1+4\times2)+3\times4\times5\times(2-2-1-1)=14$

(II) $V = 4\times3\times4\times5 : 14 = 240 : 14 = \frac{120}{7} =$ no entero

Caso no posible

---

6 $\boxed{2P_3 + 1P_4 + 1P_6}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=2)$ $P_4\ (b=4;\ n_b=1)$ $P_6\ (c=6;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times4\times1+2\times6\ (3\times1+4\times2)+3\times4\times6\times(2-2-1-1)=12$

(II) $V = 4\times3\times4\times6 : 12 = 24$

(III) $C_3 = 4\times4\times6\times2 : 12 = 16$

(IV) $C_4 = 4\times3\times6\times1 : 12 = 6$

(V) $C_6 = 4\times3\times4\times1 : 12 = 4$

$C = 16+6+4 = 26$ $V = 24$ $A = 48$ Caso posible

---

7 $\boxed{2\,P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_7}$ $P_3\,(a = 3;\ n_a = 2)$ $P_4\,(b = 4;\ n_b = 1)$ $P_7\,(c = 7;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 4 \times 1 + 2 \times 7 \times (3 \times 1 + 4 \times 2) + 3 \times 4 \times 7 \times (2 - 2 - 1 - 1) = 10$

(II) $V = 4 \times 3 \times 4 \times 7 : 10 = \frac{168}{5} =$ no entero — Caso no posible

---

8 $\boxed{2\,P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_8}$ $P_3\,(a = 3;\ n_a = 2)$ $P_4\,(b = 4;\ n_b = 1)$ $P_8\,(c = 8;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 4 \times 1 + 2 \times 8 \times (3 \times 1 + 4 \times 2) + 3 \times 4 \times 8 \times (2 - 2 - 1 - 1) = 8$

(II) $V = 4 \times 3 \times 4 \times 8 : 8 = 48$

(III) $C_3 = 4 \times 4 \times 8 \times 2 : 8 = 32$

(IV) $C_4 = 4 \times 3 \times 8 \times 1 : 8 = 12$

(V) $C_8 = 4 \times 3 \times 4 \times 1 : 8 = 6$

$C = 32 + 12 + 6 = 50$ $V = 48$ $A = 96$ Caso posible

---

9 $\boxed{2\,P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_9}$ $P_3\,(a = 3;\ n_a = 2)$ $P_4\,(b = 4;\ n_b = 1)$ $P_9\,(c = 9;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 4 \times 1 + 2 \times 9 \times (3 \times 1 + 4 \times 2) + 3 \times 4 \times 9 \times (2 - 2 - 1 - 1) = 6$

(II) $V = 4 \times 3 \times 4 \times 9 : 6 = 72$

(III) $C_3 = 4 \times 4 \times 9 \times 2 : 6 = 48$

(IV) $C_4 = 4 \times 3 \times 9 \times 1 : 6 = 18$

(V) $C_9 = 4 \times 3 \times 4 \times 1 : 6 = 8$

$C = 48 + 18 + 8 = 74$ $V = 72$ $A = 144$ Caso posible

10 $2P_3 + 1P_4 + 1P_{10}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=2)$ $P_4\ (b=4;\ n_b=1)$ $P_{10}\ (c=10;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times4\times1 + 2\times10\times(3\times1+4\times2) + 3\times4\times10\times(2-2-1-1) = 4$

(II) $V = 4\times3\times4\times10 : 4 = 120$

(III) $C_3 = 4\times4\times10\times2 : 4 = 80$

(IV) $C_4 = 4\times3\times10\times1 : 4 = 30$

(V) $C_{10} = 4\times3\times4\times1 : 4 = 12$

$C = 80 + 30 + 12 = 122$ $V = 120$ $A = 240$ Caso posible

---

11 $2P_3 + 1P_4 + 1P_{11}$ $P_3\ (a=3;\ n_a=2)$ $P_4\ (b=4;\ n_b=1)$ $P_{11}\ (c=11;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times3\times4\times1 + 2\times11\times(3\times1+4\times2) + 3\times4\times11\times(2-2-1-1) = 2$

(II) $V = 4\times3\times4\times11 : 2 = 264$

(III) $C_3 = 4\times4\times11\times2 : 2 = 176$

(IV) $C_4 = 4\times3\times11\times1 : 2 = 66$

(V) $C_{11} = 4\times3\times4\times1 : 2 = 24$

$C = 176 + 66 + 24 = 266$ $V = 264$ $A = 528$ Caso posible

---

12 $2P_3 + 2P_5$ $P_3\ (a=3;\ n_a=2)$ $P_5\ (b=5;\ n_b=2)$

(VI) $\Delta' = 2\times(3\times2+5\times2) + 3\times5\times(2-2-2) = 2$

(VII) $V = 4\times3\times5 : 2 = 30$

(VIII) $C_3 = 4\times5\times2 : 2 = 20$

UNE A4 210 X 297

(IX) $C_5 = 4 \times 3 \times 2 : 2 = 12$

$C = 20 + 12 = 32 \quad V = 30 \quad A = 60$ Caso posible

---

13 $\boxed{2 P_3 + 1 P_5 + 1 P_6}$ $P_3\ (a = 3;\ n_a = 2)$ $P_5\ (b = 5;\ n_b = 1)$ $P_6\ (c = 6;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 5 \times 1 + 2 \times 6 \times (3 \times 1 + 5 \times 2) + 3 \times 5 \times 6 \times (2 - 2 - 1 - 1) = 6$

(II) $V = 4 \times 3 \times 5 \times 6 : 6 = 60$

(III) $C_3 = 4 \times 5 \times 6 \times 2 : 6 = 40$

(IV) $C_5 = 4 \times 3 \times 6 \times 1 : 6 = 12$

(V) $C_6 = 4 \times 3 \times 5 \times 1 : 6 = 10$

$C = 40 + 12 + 10 = 62 \quad V = 60 \quad A = 120$ Caso posible

---

14 $\boxed{2 P_3 + 1 P_5 + 1 P_7}$ $P_3\ (a = 3;\ n_a = 2)$ $P_5\ (b = 5;\ n_b = 1)$ $P_7\ (c = 7;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 5 \times 1 + 2 \times 7 \times (3 \times 1 + 5 \times 2) + 3 \times 5 \times 7 \times (2 - 2 - 1 - 1) = 2$

(II) $V = 4 \times 3 \times 5 \times 7 : 2 = 210$

(III) $C_3 = 4 \times 5 \times 7 \times 2 : 2 = 140$

(IV) $C_5 = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 2 = 42$

(V) $C_7 = 4 \times 3 \times 5 \times 1 : 2 = 30$

$C = 140 + 42 + 30 = 212 \quad V = 210 \quad A = 420$ Caso posible

---

15 $\boxed{1 P_3 + 3 P_4}$ $P_3\ (a = 3;\ n_a = 1)$ $P_4\ (b = 4;\ n_b = 3)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 3 + 4 \times 1) + 3 \times 4 \times (2 - 1 - 3) = 2$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 4 : 2 = 24$

(VIII) $C_3 = 4 \times 4 \times 1 : 2 = 8$

(IX) $C_4 = 4 \times 3 \times 3 : 2 = 18$

$C = 8 + 18 = 26 \quad V = 24 \quad A = 48$ *Caso posible*

---

16 $\boxed{1\,P_3 + 2\,P_4 + 1\,P_5}$ $P_3\,(a = 3;\ n_a = 1)$ $P_4\,(b = 4;\ n_b = 2)$ $P_5\,(c = 5;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 4 \times 1 + 2 \times 5 \times (3 \times 2 + 4 \times 1) + 3 \times 4 \times 5 \times (2 - 1 - 2 - 1) = 4$

(II) $V = 4 \times 3 \times 4 \times 5 : 4 = 60$

(III) $C_3 = 4 \times 4 \times 5 \times 1 : 4 = 20$

(IV) $C_4 = 4 \times 3 \times 5 \times 2 : 4 = 30$

(V) $C_5 = 4 \times 3 \times 4 \times 1 : 1 = 12$

$C = 20 + 30 + 12 = 62 \quad V = 60 \quad A = 120$ *Caso posible*

2.53 Casos posibles de poliedros arquimedianos con tres caras regulares, no todas iguales.

17 $\boxed{2\,P_3 + 1\,P_4}$ $P_3\,(a = 3;\ n_a = 2)$ $P_4\,(b = 4;\ n_b = 1)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 1 + 4 \times 2) + 3 \times 4 \times (2 - 2 - 1) = 10$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 4 : 10 = \frac{24}{5} =$ no entero *Caso no posible*

---

18 $\boxed{2\,P_3 + 1\,P_5}$ $P_3\,(a = 3;\ n_a = 2)$ $P_5\,(b = 5;\ n_b = 1)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 1 + 5 \times 2) + 3 \times 5 \times (2 - 2 - 1) = 11$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 5 : 11 = \frac{60}{11} =$ no entero *Caso no posible*

---

19 | $1P_3 + 2P_4$ | $P_3 \ (a=3;\ n_a=1)$ $P_4 \ (b=4;\ n_b=2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3\times 2 + 4 \times 1) + 3 \times 4 \times (2 - 1 - 2) = 8$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 4 : 8 = 6$

(VIII) $C_3 = 4 \times 4 \times 1 : 8 = 2$

(IX) $C_4 = 4 \times 3 \times 2 : 8 = 3$

$C = 2 + 3 = 5$ $V = 6$ $A = 9$

Caso posible

---

20 al 26 | $1P_3 + 1P_4 + 1P_n$, $4 < n < 12$ | $P_3 \ (a=3;\ n_a=1)$ $P_4 \ (b=4;\ n_b=1)$ $P_n \ (c=n;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2\times 3 \times 4 \times 1 + 2n \times (3 \times 1 + 4 \times 1) + 3 \times 4 \times n \times (2-1-1-1) = 24 + 2n$

(II) $V = 4 \times 3 \times 4 \times n : (24 + 2n) = \dfrac{24\,n}{12+n}$

Siendo $4 < n < 12$, V es sólo entero para el valor de $n = 6$. Por consiguiente:

20 $n = 5$ Caso no posible

---

21 | $1P_3 + 1P_4 + 1P_6$, $n = 6$ | $\Delta = 24 + 2 \times 6 = 36$ $V = \dfrac{24 \times 6}{12 + 6} = 8$

(III) $C_3 = 4 \times 4 \times 6 \times 1 : 36 = \dfrac{8}{3} =$ no entero

Caso no posible

---

22 al 25 $n = 7$ al $n = 11$ Casos no posibles

UNE A4 210 X 297

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 31 al 40

27 — $1\ P_3 + 2\ P_5$ — $P_3\ (a = 3;\ n_a = 1)$ — $P_5\ (b = 5;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 2 + 5 \times 1) + 3 \times 5 \times (2 - 1 - 2) = 7$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 5 : 7 = \frac{60}{7} =$ no entero — Caso no posible

---

28 al 51 — $1\ P_3 + 1\ P_5 + 1\ P_n$, $5 < n < 30$ — $P_3\ (a = 3;\ n_a = 1)$ — $P_5\ (b = 5;\ n_b = 1)$ — $P_n\ (c = n;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 5 \times 1 + 2 \times n \times (3 \times 1 + 5 \times 1) + 3 \times 5 \times n \times (2 - 1 - 1 - 1) = 30 + n$

(II) $V = 4 \times 3 \times 5 \times n : (30 + n) = \frac{60\ n}{30 + n}$

Siendo $5 < n < 30$, V es sólo entero para los valores de n siguientes: 6, 10, 15, 20. Por consiguiente:

---

28 — $1\ P_3 + 1\ P_5 + 1\ P_6$, $n = 6$ — $\Delta = 30 + 6 = 36$ — $V = \frac{60 \times 6}{30 + 6} = 10$

(III) $C_3 = 4 \times 5 \times 6 \times 1 : 36 = \frac{10}{3} =$ no entero — Caso no posible

---

29 al 31 — $n = 7$ al $n = 9$ — Casos no posibles

---

32 — $1\ P_3 + 1\ P_5 + 1\ P_{10}$, $n = 10$ — $\Delta = 30 + 10 = 40$ — $V = \frac{60 \times 10}{30 + 10} = 15$

(III) $C_3 = 4 \times 5 \times 10 \times 1 : 40 = 5$

(IV) $C_5 = 4 \times 3 \times 10 \times 1 : 40 = 3$

(V) $C_{10} = 4 \times 3 \times 5 \times 1 : 40 = \frac{3}{2} =$ no entero — Caso no posible

---

33 $n = 11$
al al — Casos no posibles
36 $n = 14$

37
$1\ P_3 + 1\ P_5 + 1\ P_{15}$
$n = 15$

$\Delta = 30 + 15 ; 45$ $\qquad V = \dfrac{60 \times 15}{30 + 15} = 20$

(III) $C_3 = 4 \times 5 \times 15 \times 1 : 45 = \dfrac{20}{3} =$ no entero — Caso no posible

---

38 $n = 16$
al al — Casos no posibles
41 $n = 19$

42
$1\ P_3 + 1\ P_5 + 1\ P_{20}$
$n = 20$

$\Delta = 30 + 20 = 50$ $\qquad V = \dfrac{60 \times 20}{30 + 20} = 24$

(III) $C_3 = 4 \times 5 \times 20 \times 1 : 50 = 8$

(IV) $C_5 = 4 \times 3 \times 20 \times 1 : 50 = \dfrac{24}{5} =$ no entero — Caso no posible

---

43 $n = 21$
al al — Casos no posibles
51 $n = 29$

52
$1\ P_3 + 2\ P_6$

$P_3\ (a = 3;\ n_a = 1)$ $\qquad P_6\ (b = 6;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 2 + 6 \times 1) + 3 \times 6 \times (2 - 1 - 2) = 6$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 6 : 6 = 12$

(VIII) $C_3 = 4 \times 6 \times 1 : 6 = 4$

(IX) $C_6 = 4 \times 3 \times 2 : 6 = 4$

$C = 4 + 4 = 8$ $\qquad V = 12$ $\qquad A = 18$

Caso posible

UNE A4 210 X 297

53 | $1P_3 + 1P_6 + 1P_n$; $6 < n < \infty$ | $P_3\ (a=3;\ n_a=1)$ $P_6\ (b=6;\ n_b=1)$ $P_n\ (c=n;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 6 \times 1 + 2n \times (3 \times 1 + 6 \times 1) + 3 \times 6 \times n \times (2-1-1-1) = 36$

(II) $V = 4 \times 3 \times 6 \times n : 36 = 2n$

(III) $C_3 = 4 \times 6 \times n \times 1 : 36 = \frac{2}{3}n$

(IV) $C_6 = 4 \times 3 \times n \times 1 : 36 = \frac{1}{3}n$ $\quad C = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}n + 2 = n+2 \qquad V = 2n$

(V) $C_n = 4 \times 3 \times 6 \times 1 : 36 = 2$ $\qquad A = 3n$

Caso posible

Los valores de n que sólo darán números enteros en C_3 y C_4 son los de $n = 9, 12, 15, 18 \ldots 3p$ ($p > 2$ y entero).

En este caso, y con los valores restringidos de n, existirán infinitas soluciones.

---

54 | $1P_3 + 2P_7$ | $P_3\ (a=3;\ n_a=1)$ $P_7\ (b=7;\ n_b=2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 2 + 7 \times 1) + 3 \times 7 \times (2-1-2) = 5$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 7 : 5 = \frac{84}{5}$ = no entero

Caso no posible

---

55 al 88 | $1P_3 + 1P_7 + 1P_n$; $7 < n < 42$ | $P_3\ (a=3;\ n_a=1)$ $P_7\ (b=7;\ n_b=1)$ $P_n\ (c=n;\ n_c=1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 7 \times 1 + 2n \times (3 \times 1 + 7 \times 1) + 3 \times 7 \times n \times (2-1-1-1) = 42-n$

(II) $V = 4 \times 3 \times 7 \times n : (42-n) = \frac{84n}{42-n}$

Siendo $7 < n < 42$, V es sólo entero para los valores de "n" siguientes: 14, 18, 21, 24, 28, 30, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41.

UNE A4 210 X 297

Teniendo en cuenta la fórmula V. (independiente de $c = n$) podremos reducir las posibles soluciones anteriores a

$$(V) \quad C_n = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : (42 - n) = \frac{84}{42-n}$$

y siendo $84 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$ cuyos múltiplos son 1, 2, 4, 6, 7, 12, 21, 28, las soluciones enteras de C_n se obtendrían con los valores de $n = 41, 40, 38, 36, 35, 30, 21, 14$, que son tan sólo los que ensayaremos a continuación con las fórmulas III y IV.

---

55 al 60 — $n = 8$ al $n = 13$ — Casos no posibles

---

61 — $1 P_3 + 1 P_7 + 1 P_{14}$, $n = 14$

$\Delta = 42 - 14 = 28$ $\quad V = \frac{84 \times 14}{42 - 14} = 42$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 14 \times 1 : 28 = 14$

(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 14 \times 1 : 28 = 6$

(V) $C_{14} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 28 = 3$

$C = 14 + 6 + 3 = 23$ $\quad V = 42$ $\quad A = 63$

Caso posible

---

62 al 67 — $n = 15$ al $n = 20$ — Casos no posibles

---

68 — $1 P_3 + 1 P_7 + 1 P_{21}$, $n = 21$

$\Delta = 42 - 21 = 21$ $\quad V = \frac{84 \times 21}{42 - 21} = 84$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 21 \times 1 : 21 = 28$

(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 21 \times 1 : 21 = 12$

(V) $C_{21} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 21 = 4$ | $C = 28 + 12 + 4 = 44$ $V = 84$ $A = 126$

Caso posible

---

69 $n = 22$
a a
76 $n = 29$

Casos no posibles

---

77 $1\ P_3 + 1\ P_7 + 1\ P_{30}$, $n = 30$ $\quad \Delta = 42 - 30 = 12 \quad V = \dfrac{84 \times 30}{42 - 30} = 210$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 30 \times 1 : 12 = 70$
(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 30 \times 1 : 12 = 30$
(V) $C_{30} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 12 = 7$

$C = 70 + 30 + 7 = 107 \quad V = 210 \quad A = 315$

Caso posible

---

78 $n = 31$
a a
81 $n = 34$

Casos no posibles

---

82 $1\ P_3 + 1\ P_7 + 1\ P_{35}$, $n = 35$ $\quad \Delta = 42 - 35 = 7 \quad V = \dfrac{84 \times 35}{42 - 35} = 420$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 35 \times 1 : 7 = 140$
(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 35 \times 1 : 7 = 60$
(V) $C_{35} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 7 = 12$

$C = 140 + 60 + 12 = 212 \quad V = 420 \quad A = 630$

Caso posible

---

83 $1\ P_3 + 1\ P_7 + 1\ P_{36}$, $n = 36$ $\quad \Delta = 42 - 36 = 6 \quad V = \dfrac{84 \times 36}{42 - 36} = 504$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 36 \times 1 : 6 = 168$
(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 36 \times 1 : 6 = 72$
(V) $C_{36} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 6 = 14$

$C = 168 + 72 + 14 = 254 \quad V = 504 \quad A = 756$

Caso posible

---

84 $n = 37$ — Caso no posible

---

85 $1\,P_3 + 1\,P_7 + 1\,P_{38}$, $n = 38$

$\Delta = 42 - 38 = 4$ $V = \dfrac{84 \times 38}{42 - 38} = 798$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 38 \times 1 : 4 = 266$

(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 38 \times 1 : 4 = 114$

(V) $C_{38} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 4 = 21$

$C = 266 + 114 + 21 = 401$ $V = 798$ $A = 1197$

Caso posible

---

86 $n = 39$ — Caso no posible

---

87 $1\,P_3 + 1\,P_7 + 1\,P_{40}$, $n = 40$

$\Delta = 42 - 40 = 2$ $V = \dfrac{84 \times 40}{42 - 40} = 1680$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 40 \times 1 : 2 = 560$

(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 40 \times 1 : 2 = 240$

(V) $C_{40} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 2 = 42$

$C = 560 + 240 + 42 = 842$ $V = 1680$ $A = 2520$

Caso posible

---

88 $1\,P_3 + 1\,P_7 + 1\,P_{41}$, $n = 41$

$\Delta = 42 - 41 = 1$ $V = \dfrac{84 \times 41}{42 - 41} = 3444$

(III) $C_3 = 4 \times 7 \times 41 \times 1 : 1 = 1148$

(IV) $C_7 = 4 \times 3 \times 41 \times 1 : 1 = 492$

(V) $C_{41} = 4 \times 3 \times 7 \times 1 : 1 = 84$

$C = 1148 + 492 + 84 = 1724$ $V = 3444$ $A = 5166$

Caso posible

---

89 $1\,P_3 + 2\,P_8$ $P_3\ (a = 3;\ n_a = 1)$ $P_8\ (b = 8;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 2 + 8 \times 1) + 3 \times 8 \times (2 - 1 - 2) = 4$

(VIII) $C_3 = 4 \times 8 \times 1 : 4 = 8$

(IX) $C_8 = 4 \times 3 \times 2 : 4 = 6$ } $C = 8 + 6 = 14$ $V = 24$ $A = 36$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 8 : 4 = 24$

Caso posible

---

90 al 104

$1\ P_3 + 1\ P_8 + 1\ P_n$ $8 < n < 24$

$P_3\ (a = 3;\ n_a = 1)$ $P_8\ (b = 8;\ n_b = 1)$ $P_n\ (c = n;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 8 \times 1 + 2n \times (3 \times 1 + 8 \times 1) + 3 \times 8 \times n \times (2 - 1 - 1 - 1) = 48 - 2n$

(II) $V = 4 \times 3 \times 8 \times n : (48 - 2n) = \dfrac{48\ n}{24 - n}$

(V) $C_n = 4 \times 3 \times 8 \times 1 : (48 - 2n) = \dfrac{48}{24 - n}$

En esta última fórmula se tiene que $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ cuyos múltiplos son: 2, 4, 6, 8, 12; las soluciones enteras de C_n se obtendrán con los valores de $n = 22, 20, 18, 16, 12$, que son los que ensayaremos a continuación en las fórmulas III y IV, teniendo en cuenta la limitación $8 < n < 24$.

---

90 al 92 — $n = 9$ al $n = 11$ — Casos no posibles

93

$1\ P_3 + 1\ P_8 + 1\ P_{12}$ $n = 12$

$\Delta = 48 - 2 \times 12 = 24$ $V = \dfrac{48 \times 12}{24 - 12} = 48$

(III) $C_3 = 4 \times 8 \times 12 \times 1 : 24 = 16$

(IV) $C_8 = 4 \times 3 \times 12 \times 1 : 24 = 6$ } $C = 16 + 6 + 4 = 26$ $V = 48$ $A = 72$

(V) $C_{12} = 4 \times 3 \times 8 \times 1 : 24 = 4$

Caso posible

---

94 $n = 13$

al al

96 $n = 15$

Casos no posibles

---

97 $1P_3 + 1P_8 + 1P_{16}$, $n = 16$ $\Delta = 48 - 2 \times 16 = 16$ $V = \frac{48 \times 16}{24 - 16} = 96$

(III) $C_3 = 4 \times 8 \times 16 \times 1 : 16 = 32$

(IV) $C_8 = 4 \times 3 \times 16 \times 1 : 16 = 12$

(V) $C_{16} = 4 \times 3 \times 8 \times 1 : 16 = 6$

$C = 32 + 12 + 6 = 50$ $V = 96$ $A = 144$

Caso posible

---

98 $n = 17$ Caso no posible

---

99 $1P_3 + 1P_8 + 1P_{18}$, $n = 18$ $\Delta = 48 - 2 \times 18 = 12$ $V = \frac{48 \times 18}{24 - 18} = 144$

(III) $C_3 = 4 \times 8 \times 18 \times 1 : 12 = 48$

(IV) $C_8 = 4 \times 3 \times 18 \times 1 : 12 = 18$

(V) $C_{18} = 4 \times 3 \times 8 \times 1 : 12 = 8$

$C = 48 + 18 + 8 = 74$ $V = 144$ $A = 216$

Caso posible

---

100 $n = 19$ Caso no posible

---

101 $1P_3 + 1P_8 + 1P_{20}$, $n = 20$ $\Delta = 48 - 2 \times 20 = 8$ $V = \frac{48 \times 20}{24 - 20} = 240$

(III) $C_3 = 4 \times 8 \times 20 \times 1 : 8 = 80$

(IV) $C_8 = 4 \times 3 \times 20 \times 1 : 8 = 30$

(V) $C_{20} = 4 \times 3 \times 8 \times 1 : 8 = 12$

$C = 80 + 30 + 12 = 122$ $V = 240$ $A = 360$

Caso posible

---

cuyos múltiplos son: 2, 4, 6, 12, 18, 27, 36, 54; las soluciones enteras de C_n se obtendrán con los valores de $n = 16, 14, 12, 9, 6$, que son los que ensayaremos a continuación en las fórmulas III y IV, teniendo en cuenta la limitación

$9 < n < 18$

---

106 y 107 $n = 10$ y $n = 11$ — Casos no posibles

---

108 $1\,P_3 + 1\,P_9 + 1\,P_{12}$, $n = 12$

$\Delta = 54 - 3 \times 12 = 18$ $V = \dfrac{108 \times 12}{54 - 3 \times 12} = 72$

(III) $C_3 = 4 \times 9 \times 12 \times 1 : 18 = 24$

(IV) $C_9 = 4 \times 3 \times 12 \times 1 : 18 = 8$

(V) $C_{12} = 4 \times 3 \times 9 \times 1 : 18 = 6$

$C = 24 + 8 + 6 = 38$ $V = 72$ $A = 108$

Caso posible

---

109 $n = 13$ — Caso no posible

---

110 $1\,P_3 + 1\,P_9 + 1\,P_{14}$, $n = 14$

$\Delta = 54 - 3 \times 14 = 12$ $V = \dfrac{108 \times 14}{54 - 3 \times 14} = 126$

(III) $C_3 = 4 \times 9 \times 14 \times 1 : 12 = 42$

(IV) $C_9 = 4 \times 3 \times 14 \times 1 : 12 = 14$

(V) $C_{14} = 4 \times 3 \times 9 \times 1 : 12 = 9$

$C = 42 + 14 + 9 = 65$ $V = 126$ $A = 189$

Caso posible

---

111 $n = 15$ — Caso no posible

UNE A4 210 X 297

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 41 al 50

112 | $1\ P_3 + 1\ P_9 + 1\ P_{16}$ / $n = 16$ | $\Delta = 54 - 3 \times 16 = 6$ | $V = \dfrac{108 \times 16}{54 - 3 \times 16} = 288$

(III) $C_3 = 4 \times 9 \times 16 \times 1 : 6 = 96$
(IV) $C_9 = 4 \times 3 \times 16 \times 1 : 6 = 32$
(V) $C_{16} = 4 \times 3 \times 9 \times 1 : 6 = 18$

$C = 96 + 32 + 18 = 146$ $V = 288$ $A = 432$

Caso posible

---

113 $n = 17$ Caso no posible

---

114 | $1\ P_3 + 2\ P_{10}$ | $P_3\ (a = 3;\ n_a = 1)$ $P_{10}\ (b = 10;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 2 + 10 \times 1) + 3 \times 10 \times (2 - 1 - 2) = 2$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 10 : 2 = 60$

(VIII) $C_3 = 4 \times 10 \times 1 : 2 = 20$
(IX) $C_{10} = 4 \times 3 \times 2 : 2 = 12$

$C = 20 + 12 = 32$ $V = 60$ $A = 90$

Caso posible

---

115 al 118 | $1\ P_3 + 1\ P_{10} + 1\ P_n$ / $10 < n < 15$ | $P_3\ (a = 3;\ n_a = 1)$ $P_{10}\ (b = 10;\ n_b = 1)$ $P_n\ (c = n;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 10 \times 1 + 2n \times (3 \times 1 + 10 \times 1) + 3 \times 10 \times n \times (2 - 1 - 1 - 1) = 60 - 4n$

(V) $C_n = 4 \times 3 \times 10 \times 1 : (60 - 4n) = \dfrac{120}{60 - 4n}$

En esta última fórmula, y teniendo en cuenta la limitación $10 < n < 15$, para que sea entera, "n" debe ser 12, 13 ó 14.

---

115 $n = 11$ Caso no posible



116

$1\ P_3 + 1\ P_{10} + 1\ P_{12}$
$n = 12$

$\Delta = 60 - 4 \times 12 = 12$

(II) $V = 4 \times 3 \times 10 \times 12 : 12 = 120$

(III) $C_3 = 4 \times 10 \times 12 \times 1 : 12 = 40$

(IV) $C_{10} = 4 \times 3 \times 12 \times 1 : 12 = 12$

(V) $C_{12} = 4 \times 3 \times 10 \times 1 : 12 = 10$

$C = 40 + 12 + 10 = 62 \quad V = 120 \quad A = 180$

Caso posible

117

$1\ P_3 + 1\ P_{10} + 1\ P_{13}$
$n = 13$

$\Delta = 60 - 4 \times 13 = 8$

(II) $V = 4 \times 3 \times 10 \times 13 : 8 = 195$

(III) $C_3 = 4 \times 10 \times 13 \times 1 : 8 = 65$

(IV) $C_{10} = 4 \times 3 \times 13 \times 1 : 8 = \frac{39}{2}$ = no entero

Caso no posible

118

$1\ P_3 + 1\ P_{10} + 1\ P_{14}$
$n = 14$

$\Delta = 60 - 4 \times 14 = 4$

(II) $V = 4 \times 3 \times 10 \times 14 : 4 = 420$

(III) $C_3 = 4 \times 10 \times 14 \times 1 : 4 = 140$

(IV) $C_{10} = 4 \times 3 \times 14 \times 1 : 4 = 42$

(V) $C_{14} = 4 \times 3 \times 10 \times 1 : 4 = 30$

$C = 140 + 42 + 30 = 212 \quad V = 420 \quad A = 630$

Caso posible

119

$1\ P_3 + 2\ P_{11}$ $\quad P_3\ (a = 3;\ n_a = 1) \quad P_{11}\ (b = 11;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (3 \times 2 + 11 \times 1) + 3 \times 11 \times (2 - 1 - 2) = 1$

(VII) $V = 4 \times 3 \times 11 : 1 = 132$

UNE A4 210 X 297

(VIII) $C_3 = 4 \times 11 \times 1 : 1 = 44$

(IX) $C_{11} = 4 \times 3 \times 2 : 1 = 24$

$C = 44 + 24 = 68 \quad V = 132 \quad A = 198$

Caso posible

---

130 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_{11} + 1\,P_{12}}$ $P_3\,(a = 3;\ n_a = 1)$ $P_{11}\,(b = 11;\ n_b = 1)$ $P_{12}\,(c = 12;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 11 \times 1 + 2 \times 12 \times (3 \times 1 + 11 \times 1) + 3 \times 11 \times 12 \times (2 - 1 - 1 - 1) = 6$

(II) $V = 4 \times 3 \times 11 \times 12 : 6 = 264$

(III) $C_3 = 4 \times 11 \times 12 \times 1 : 6 = 88$

(IV) $C_{11} = 4 \times 3 \times 12 \times 1 : 6 = 24$

(V) $C_{12} = 4 \times 3 \times 11 \times 1 : 6 = 22$

$C = 88 + 24 + 22 = 134 \quad V = 264 \quad A = 396$

Caso posible

---

131 $\boxed{1\,P_3 + 1\,P_{11} + 1\,P_{13}}$ $P_3\,(a = 3;\ n_a = 1)$ $P_{11}\,(b = 11;\ n_b = 1)$ $P_{13}\,(c = 13;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 3 \times 11 \times 1 + 2 \times 13 \times (3 \times 1 + 11 \times 1) + 3 \times 11 \times 13 \times (2 - 1 - 1 - 1) = 1$

(II) $V = 4 \times 3 \times 11 \times 13 : 1 = 1716$

(III) $C_3 = 4 \times 11 \times 13 \times 1 : 1 = 572$

(IV) $C_{11} = 4 \times 3 \times 13 \times 1 : 1 = 156$

(V) $C_{13} = 4 \times 3 \times 11 \times 1 : 1 = 132$

$C = 572 + 156 + 132 = 860 \quad V = 1716 \quad A = 2574$

Caso posible

---

132 $\boxed{2\,P_4 + 1\,P_n \quad 4 < n < \infty}$ $P_4\,(a = 4;\ n_a = 2)$ $P_n\,(b = n;\ n_b = 1)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (4 \times 1 + n \times 2) + 4n \times (2 - 2 - 1) = 8$

(VII) $V = 4 \times 4 \times n : 8 = 2n$

(VIII) $C_4 = 4 \times n \times 2 : 8 = n$

(IX) $C_n = 4 \times 4 \times 1 : 8 = 2$

$C = n + 2 \quad V = 2n \quad A = 3n$

Infinitas soluciones

Caso posible

<u>123</u> $\boxed{1\ P_4 + 2\ P_5}$ $P_4\ (a = 4;\ n_a = 1)$ $P_5\ (b = 5;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (4 \times 2 + 5 \times 1) + 4 \times 5 \times (2 - 1 - 2) = 6$

(VII) $C_4 = 4 \times 5 \times 1 : 6 = \dfrac{10}{3} =$ no entero — Caso no posible

---

<u>124</u> al <u>127</u> $\boxed{\begin{matrix} 1\ P_4 + 1\ P_5 + 1\ P_n \\ 5 < n < 20 \end{matrix}}$ $P_4\ (a = 4;\ n_a = 1)$ $P_5\ (b = 5;\ n_b = 1)$ $P_n\ (c = n;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 4 \times 5 \times 1 + 2n \times (4 \times 1 + 5 \times 1) + 4 \times 5 \times n \times (2 - 1 - 1 - 1) = 40 - 2n$

(V) $C_n = 4 \times 4 \times 5 \times 1 : (40 - 2n) = \dfrac{40}{20 - n}$

En esta última fórmula, y teniendo en cuenta la limitación $5 < n < 20$, para que sea entera, "n" debe ser 10, 12, 15, 16, 18, 19, que son los valores que ensayamos a continuación en las fórmulas II, III y IV.

<u>124</u> al <u>127</u> $n = 6$ al $n = 9$ — Casos no posibles

---

<u>128</u> $\boxed{\begin{matrix} 1\ P_4 + 1\ P_5 + 1\ P_{10} \\ n = 10 \end{matrix}}$ $\Delta = 40 - 2 \times 10 = 20$

(II) $V = 4 \times 4 \times 5 \times 10 : 20 = 40$

(III) $C_4 = 4 \times 5 \times 10 \times 1 : 20 = 10$

(IV) $C_5 = 4 \times 4 \times 10 \times 1 : 20 = 8$

(V) $C_{10} = 4 \times 4 \times 5 \times 1 : 20 = 4$

$C = 10 + 8 + 4 = 22$ $V = 40$ $A = 60$

Caso posible

<u>129</u> $n = 11$ — Caso no posible

UNE A4 210 X 297

130 $1P_4 + 1P_5 + 1P_{12}$, $n = 12$ $\qquad \Delta = 40 - 2 \times 12 = 16$ ✓

(II) $V = 4 \times 4 \times 5 \times 12 : 16 = 60$ ✓

(III) $C_4 = 4 \times 5 \times 12 \times 1 : 16 = 15$ ✓

(IV) $C_5 = 4 \times 4 \times 12 \times 1 : 16 = 12$ ✓ $\qquad C = 15 + 12 + 5 = 32 \qquad V = 60 \qquad A = 90$

(V) $C_{12} = 4 \times 4 \times 5 \times 1 : 16 = 5$

Caso posible

---

131 $n = 13$
y y
132 $n = 14$

Casos no posibles

---

133 $1P_4 + 1P_5 + 1P_{15}$, $n = 15$ $\qquad \Delta = 40 - 2 \times 15 = 10$

(II) $V = 4 \times 4 \times 5 \times 15 : 10 = 120$

(III) $C_4 = 4 \times 5 \times 15 \times 1 : 10 = 30$

(IV) $C_5 = 4 \times 4 \times 15 \times 1 : 10 = 24$ $\qquad C = 30 + 24 + 8 = 62 \qquad V = 120 \qquad A = 180$

(V) $C_{15} = 4 \times 4 \times 5 \times 1 : 10 = 8$

Caso posible

---

134 $1P_4 + 1P_5 + 1P_{16}$, $n = 16$ $\qquad \Delta = 40 - 2 \times 16 = 8$

(II) $V = 4 \times 4 \times 5 \times 16 : 8 = 160$

(III) $C_4 = 4 \times 5 \times 16 \times 1 : 8 = 40$

(IV) $C_5 = 4 \times 4 \times 16 \times 1 : 8 = 32$ $\qquad C = 40 + 32 + 10 = 82 \qquad V = 160 \qquad A = 240$

(V) $C_{16} = 4 \times 4 \times 5 \times 1 : 8 = 10$

Caso posible

---

135 $n = 17$ — Caso no posible

136

$$1 P_4 + 1 P_5 + 1 P_{18} \quad n = 18$$

$\Delta = 40 - 2 \times 18 = 4$

(II) $V = 4 \times 4 \times 5 \times 18 : 4 = 360$

(III) $C_4 = 4 \times 5 \times 18 \times 1 : 4 = 90$

(IV) $C_5 = 4 \times 4 \times 18 \times 1 : 4 = 72$

(V) $C_{18} = 4 \times 4 \times 5 \times 1 : 4 = 20$

$C = 90 + 72 + 20 = 182 \quad V = 360 \quad A = 540$

Caso posible

137

$$1 P_4 + 1 P_5 + 1 P_{19} \quad n = 19$$

$\Delta = 40 - 2 \times 19 = 2$

(II) $V = 4 \times 4 \times 5 \times 19 : 2 = 760$

(III) $C_4 = 4 \times 5 \times 19 \times 1 : 2 = 190$

(IV) $C_5 = 4 \times 4 \times 19 \times 1 : 2 = 152$

(V) $C_{19} = 4 \times 4 \times 5 \times 1 : 2 = 40$

$C = 190 + 152 + 40 = 382 \quad V = 760 \quad A = 1140$

Caso posible

138

$$1 P_4 + 2 P_6$$

$P_4 \ (a = 4; \ n_a = 1) \quad P_6 \ (b = 6; \ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (4 \times 2 + 6 \times 1) + 4 \times 6 \times (2 - 1 - 2) = 4$

(VII) $V = 4 \times 4 \times 6 : 4 = 24$

(VIII) $C_4 = 4 \times 6 \times 1 : 4 = 6$

(IX) $C_6 = 4 \times 4 \times 2 : 4 = 8$

$C = 6 + 8 = 14 \quad V = 24 \quad A = 36$

Caso posible

---

139 al 143

$$1 P_4 + 1 P_6 + 1 P_n \quad 6 < n < 12$$

$P_4 \ (a = 4; \ n_a = 1) \quad P_6 \ (b = 6; \ n_b = 1) \quad P_n \ (c = n; \ n_c = 1)$

(I) $A = 2 \times 4 \times 6 \times 1 + 2n \times (4 \times 1 + 6 \times 1) + 4 \times 6 \times n \times (2-1-1-1) = 48 - 4n$

(V) $C_n = 4 \times 4 \times 6 \times 1 : (48 - 4n) = \dfrac{24}{12-n}$

En esta última fórmula, y teniendo en cuenta la limitación $6 < n < 12$, para que sea entera, "n" debe ser 8, 9, 10, 11, que son los valores que ensayamos a continuación en las fórmulas II, III, IV y V

---

139 $n = 7$ Caso no posible

---

140 $1P_4 + 1P_6 + 1P_8$, $n = 8$

$P_4 (a = 4;\ n_a = 1)$ $P_6 (b = 6;\ n_b = 1)$ $P_8 (c = 8;\ n_c = 1)$

$\Delta = 48 - 4 \times 8 = 16$

(II) $V = 4 \times 4 \times 6 \times 8 : 16 = 48$

(III) $C_4 = 4 \times 6 \times 8 \times 1 : 16 = 12$

(IV) $C_6 = 4 \times 4 \times 8 \times 1 : 16 = 8$

(V) $C_8 = 4 \times 4 \times 6 \times 1 : 16 = 6$

$C = 12 + 8 + 6 = 26$ $V = 48$ $A = 72$

Caso posible

---

141 $1P_4 + 1P_6 + 1P_9$, $n = 9$

$\Delta = 48 - 4 \times 9 = 12$

(II) $V = 4 \times 4 \times 6 \times 9 : 12 = 72$

(III) $C_4 = 4 \times 6 \times 9 \times 1 : 12 = 18$

(IV) $C_6 = 4 \times 4 \times 9 \times 1 : 12 = 12$

(V) $C_9 = 4 \times 4 \times 6 \times 1 : 12 = 8$

$C = 18 + 12 + 8 = 38$ $V = 72$ $A = 108$

Caso posible

---

142 $1P_4 + 1P_6 + 1P_{10}$, $n = 10$ $\Delta = 48 - 4 \times 10 = 8$

(II) $V = 4 \times 4 \times 6 \times 10 : 8 = 120$

(III) $C_4 = 4 \times 6 \times 10 \times 1 : 8 = 30$

(IV) $C_6 = 4 \times 4 \times 10 \times 1 : 8 = 20$

(V) $C_{10} = 4 \times 4 \times 6 \times 1 : 8 = 12$

$C = 30 + 20 + 12 = 62$ $V = 120$ $A = 180$

Caso posible

---

143 $1P_4 + 1P_6 + 1P_{11}$, $n = 11$ $\Delta = 48 - 4 \times 11 = 4$

(II) $V = 4 \times 4 \times 6 \times 11 : 4 = 264$

(III) $C_4 = 4 \times 6 \times 11 \times 1 : 4 = 66$

(IV) $C_6 = 4 \times 4 \times 11 \times 1 : 4 = 44$

(V) $C_{11} = 4 \times 4 \times 6 \times 1 : 4 = 24$

$C = 66 + 44 + 24 = 134$ $V = 264$ $A = 396$

Caso posible

---

144 $1P_4 + 2P_7$ $P_4\ (a = 4;\ n_a = 1)$ $P_7\ (b = 7;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (4 \times 2 + 7 \times 1) + 4 \times 7 \times (2 - 1 - 2) = 2$

(VII) $V = 4 \times 4 \times 7 : 2 = 56$

(VIII) $C_4 = 4 \times 7 \times 1 : 2 = 14$

(IX) $C_7 = 4 \times 4 \times 2 : 2 = 16$

$C = 14 + 16 = 30$ $V = 56$ $A = 84$

Caso posible

---

145 $1P_4 + 1P_7 + 1P_8$ $P_4\ (a = 4;\ n_a = 1)$ $P_7\ (b = 7;\ n_b = 1)$ $P_8\ (c = 8;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 4 \times 7 \times 1 + 2 \times 8 \times (4 \times 1 + 7 \times 1) + 4 \times 7 \times 8 \times (2 - 1 - 1 - 1) = 8$

(II) $V = 4 \times 4 \times 7 \times 8 : 8 = 112$

(III) $C_4 = 4 \times 7 \times 8 \times 1 : 8 = 28$

(IV) $C_7 = 4 \times 4 \times 8 \times 1 : 2 = 16$
(V) $C_8 = 4 \times 4 \times 7 \times 1 : 8 = 14$
} $C = 28 + 16 + 14 = 58$ $V = 112$ $A = 168$

Caso posible

<u>145</u> $1 P_4 + 1 P_7 + 1 P_9$ $P_4 (a = 4;\ n_a = 1)$ $P_7 (b = 7;\ n_b = 1)$ $P_9 (c = 9;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 4 \times 7 \times 1 + 2 \times 9 \times (4 \times 1 + 7 \times 1) + 4 \times 7 \times 9 \times (2 - 1 - 1 - 1) = 2$

(II) $V = 4 \times 4 \times 7 \times 9 : 2 = 504$

(III) $C_4 = 4 \times 7 \times 9 \times 1 : 2 = 126$
(IV) $C_7 = 4 \times 4 \times 9 \times 1 : 2 = 72$
(V) $C_9 = 4 \times 4 \times 7 \times 1 : 2 = 56$
} $C = 126 + 72 + 56 = 254$ $V = 504$ $A = 756$

Caso posible

<u>147</u> al <u>150</u> $2 P_5 + 1 P_n$, $5 < n < 10$ $P_5 (a = 5;\ n_a = 2)$ $P_n (b = n;\ n_b = 1)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (5 \times 1 + n \times 2) + 5n \times (2 - 2 - 1) = 10 - n$

(IX) $C_n = 4 \times 5 \times 1 : (10 - n) = \dfrac{20}{10 - n}$

En esta última fórmula, y teniendo en cuenta la limitación $5 < n < 10$, para que sea entera, "n" debe ser 6, 8, 9, que son los valores que ensayamos a continuación en las fórmulas VII, VIII y <u>IX</u>

<u>147</u> $2 P_5 + 1 P_6$, $n = 6$ $\Delta' = 10 - 6 = 4$

(VII) $V = 4 \times 5 \times 6 : 4 = 30$

(VIII) $C_5 = 4 \times 6 \times 2 : 4 = 12$
(IX) $C_6 = 4 \times 5 \times 1 : 4 = 5$
} $C = 12 + 5 = 17$ $V = 30$ $A = 45$

Caso posible

---

148 $n = 7$ — Caso no posible

---

149 $\boxed{2P_5 + 1P_8,\ n = 8}$ $\Delta' = 10 - 8 = 2$

(VII) $V = 4 \times 5 \times 8 : 2 = 80$

(VIII) $C_5 = 4 \times 8 \times 2 : 2 = 32$

(IX) $C_8 = 4 \times 5 \times 1 : 2 = 10$

$C = 32 + 10 = 42$ $V = 80$ $A = 120$

Caso posible

---

150 $\boxed{2P_5 + 1P_9,\ n = 9}$ $\Delta' = 10 - 9 = 1$

(VII) $V = 4 \times 5 \times 9 : 1 = 180$

(VIII) $C_5 = 4 \times 9 \times 2 : 1 = 72$

(IX) $C_9 = 4 \times 5 \times 1 : 1 = 20$

$C = 72 + 20 = 92$ $V = 180$ $A = 270$

Caso posible

---

151 $\boxed{1P_5 + 2P_6}$ $P_5\ (a = 5;\ n_a = 1)$ $P_6\ (b = 6;\ n_b = 2)$

(VI) $\Delta' = 2 \times (5 \times 2 + 6 \times 1) + 5 \times 6 \cdot (2 - 1 - 2) = 2$

(VII) $V = 4 \times 5 \times 6 : 2 = 60$

(VIII) $C_5 = 4 \times 6 \times 1 : 2 = 12$

(IX) $C_6 = 4 \times 5 \times 2 : 2 = 20$

$C = 12 + 20 = 32$ $V = 60$ $A = 90$

Caso posible

---

152 $\boxed{1P_5 + 1P_6 + 1P_7}$ $P_5\ (a = 5;\ n_a = 1)$ $P_6\ (b = 6;\ n_b = 1)$ $P_7\ (c = 7;\ n_c = 1)$

(I) $\Delta = 2 \times 5 \times 6 \times 1 + 2 \times 7 \times (5 \times 1 + 6 \times 1) + 5 \times 6 \times 7 \times (2 - 1 - 1 - 1) = 4$

(II) $V = 4 \times 5 \times 6 \times 7 : 4 = 210$

(III) $C_5 = 4 \times 6 \times 7 \times 1 : 4 = 42$

(IV) $C_6 = 4 \times 5 \times 7 \times 1 : 4 = 35$

(V) $C_7 = 4 \times 5 \times 6 \times 1 : 4 = 30$

$C = 42 + 35 + 30 = 107$ $V = 210$ $A = 315$

Caso posible

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 51 al 60

2.6 Resumen general de los casos posibles de poliedros arquimedianos que cumplen las condiciones 1ª a 5ª

Como resumen del estudio de los casos posibles de poliedros arquimedianos cuyos ángulos sólidos estén formados por caras regulares y sean a su vez soluciones enteras de las relaciones métricas que han de cumplir el número de sus caras, vértices y aristas, deducidas en el párrafo 2.4 (5ª condición), obtenemos los siguientes resultados.

A Con cinco caras regulares, no todas iguales.

			Soluciones	Totales
(VII)	Caso 1	$4P_3 + 1P_4$	1	
(XIII)	" 2	$4P_3 + 1P_5$	1	2

B Con cuatro caras regulares, no todas iguales.

			Soluciones	Totales
	Caso 3	$3P_3 + 1P_n \quad (3 < n < \infty)$	∞	
(III)	" 4	$2P_3 + 2P_4$	1	
	" 6	$2P_3 + 1P_4 + 1P_5$	1	
	" 8	$2P_3 + 1P_4 + 1P_8$	1	
	" 9	$2P_3 + 1P_4 + 1P_9$	1	
	" 10	$2P_3 + 1P_4 + 1P_{10}$	1	
	" 11	$2P_3 + 1P_4 + 1P_{11}$	1	
(IX)	" 12	$2P_3 + 2P_5$	1	
	" 13	$2P_3 + 1P_5 + 1P_6$	1	
	sumas y sigue		9	2

				Soluciones	Totales
			sumas anteriores	9	2
	Caso	14	$2P_3 + 1P_5 + 1P_7$	1	
(V)	"	15	$1P_3 + 3P_4$	1	
(XI)	"	16	$1P_3 + 2P_4 + 1P_5$	1	12

C Con tres caras regulares, no todas iguales.

				Soluciones	Totales
	Caso	19	$1P_3 + 2P_4$	1	[illegible] en 152
(I)	"	52	$1P_3 + 2P_6$	1	
	"	53	$1P_3 + 1P_6 + 1P_n$ $(6 < n < \infty)$	∞	
	"	61	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{14}$	1	
	"	68	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{21}$	1	
	"	77	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{30}$	1	
	"	82	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{35}$	1	
	"	83	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{36}$	1	
	"	85	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{38}$	1	
	"	87	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{40}$	1	
	"	88	$1P_3 + 1P_7 + 1P_{41}$	1	
(II)	"	89	$1P_3 + 2P_8$	1	
	"	93	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{12}$	1	
	"	97	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{16}$	1	
	"	99	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{18}$	1	
	"	101	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{20}$	1	
	"	103	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{22}$	1	
			sumas y sigue	17	14

			soluciones	Totales
		sumas anteriores	17	14
	Caso 105	$1 P_3 + 2 P_9$	1	
	" 108	$1 P_3 + 1 P_9 + 1 P_{12}$	1 ·	
	" 110	$1 P_3 + 1 P_9 + 1 P_{10}$	1 ·	
	" 112	$1 P_3 + 1 P_9 + 1 P_{16}$	1 ·	
(VIII)	" 114	$1 P_3 + 2 P_{10}$	1	
	" 116	$1 P_3 + 1 P_{10} + 1 P_{12}$	1 ·	
	" 118	$1 P_3 + 1 P_{10} + 1 P_{14}$	1 ·	
	" 119	$1 P_3 + 2 P_{11}$	1	
	" 120	$1 P_3 + 1 P_{11} + 1 P_{12}$	1 ·	
	" 121	$1 P_3 + 1 P_{11} + 1 P_{13}$	1 ·	
	" 122	$2 P_4 + 1 P_n \quad (2 < n < \infty)$	∞	
	" 128	$1 P_4 + 1 P_5 + 1 P_{10}$	1 ·	
	" 130	$1 P_4 + 1 P_5 + 1 P_{12}$	1 ·	
	" 133	$1 P_4 + 1 P_5 + 1 P_{15}$	1 ·	
	" 134	$1 P_4 + 1 P_5 + 1 P_{16}$	1 ·	
	" 136	$1 P_4 + 1 P_5 + 1 P_{18}$	1 ·	
	" 137	$1 P_4 + 1 P_5 + 1 P_{19}$	1 ·	
(IV)	" 138	$1 P_4 + 2 P_6$	1	
(VI)	" 140	$1 P_4 + 1 P_6 + 1 P_8$	1	
	" 141	$1 P_4 + 1 P_6 + 1 P_9$	1 ·	
(XII)	" 142	$1 P_4 + 1 P_6 + 1 P_{10}$	1	
	" 143	$1 P_4 + 1 P_6 + 1 P_{11}$	1 ·	
	" 144	$1 P_4 + 2 P_7$	1	
		sumas y sigue	40	14

UNE A4 210 X 297

			Soluciones	Totales
		sumas anteriores	40	14
Caso	145	$1P_4 + 1P_7 + 1P_8$	1 ·	
"	146	$1P_4 + 1P_7 + 1P_9$	1 ·	
"	147	$2P_5 + 1P_6$	1	
"	149	$2P_5 + 1P_8$	1	
"	150	$2P_5 + 1P_9$	1	
(X) "	151	$1P_5 + 2P_6$	1	
"	152	$1P_5 + 1P_6 + 1P_7$	1 ·	47
		Total casos posibles		61

Los 61 casos de este resumen limitan considerablemente el número de soluciones diferentes de posibles poliedros arquimedianos, aún cuando en algunos casos puedan ser infinitos (casos 3, 53 y 122).

Todos ellos cumplen las condiciones necesarias ya estudiadas en los párrafos 2.1 (1ª y 2ª condición), 2.2 (3ª y 4ª id) y 2.4 (5ª id.) que resumimos a continuación:

A) Condiciones de magnitud

1ª Condición.- La suma de los ángulos planos internos de las caras que forman un ángulo sólido de un poliedro convexo (arquimediano) en cada uno de sus vértices, tiene que ser menor de cuatro rectos.

2ª Condición.- El mayor ángulo plano interno de todas

las caras que forman un ángulo sólido de un poliedro convexo (arquimediano), ha de ser menor que la suma de los ángulos planos internos de las caras restantes.

B) Condiciones de existencia

3ª Condición.- El ángulo sólido de un poliedro arquimediano sólo puede ser triedro, tetraedro o pentaedro.

4ª Condición.- En el ángulo sólido de un poliedro arquimediano sólo existirán como máximo tres caras o polígonos regulares distintos.

c) Condiciones métricas

5ª Condición.- El número de caras, vértices y aristas de todo poliedro arquimediano, han de ser soluciones enteras de las siguientes ecuaciones:

a) Para el caso de que en cada uno de sus vértices concurran tres caras regulares diferentes de $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ y $\widehat{c}$ lados respectivamente, siendo $\widehat{n_a}$, $\widehat{n_b}$ y $\widehat{n_c}$ el número de cada una de ellas:

$$\Delta = 2ab\, n_c + 2c\,(a\, n_b + b\, n_a) + abc\,(2 - n_a - n_b - n_c) \qquad (I)$$

$$V = 4abc : \Delta \qquad (II)$$

$$C_a = 4bcn_a : \Delta \qquad (III)$$

$$C_b = 4acn_n : \Delta \qquad (IV)$$

$$C_c = 4abn_c : \Delta \qquad (V)$$

b) Para el caso de que en cada uno de sus vértices concurran dos caras regulares diferentes, de $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ lados respectivamente, siendo $\widehat{n_a}$ y $\widehat{n_c}$ el número de cada una de ellas:

$$\Delta' = 2(an_b + bn_a) + ab(2 - n_a - n_b) \qquad (VI)$$

$$V = 4ab : \Delta' \qquad (VII)$$

$$C_a = 4bn_a : \Delta' \qquad (VIII)$$

$$C_b = 4an_b : \Delta' \qquad (IX)$$

3 Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un poliedro arquimediano

Los posibles poliedros arquimedianos que cumplen las condiciones 1ª a 5ª, estudiadas en los párrafos 2.1, 2.2 y 2.4, están resumidos y enumerados en el párrafo 2.6. Dichas condiciones son <u>necesarias</u> pero <u>no suficientes</u> para todo arquimediano.

Falta por comprobar como 6ª y última condición la posibilidad de existencia de un poliedro arquimediano cuyas características particulares con respecto a su número de caras, vértices y aristas, sean las contenidas en los 51 casos posibles que, como resultado de nuestro estudio, se resumen en el párrafo 2.6.

Para ello, analizaremos en cada caso la posibilidad de dicha existencia, es decir trataremos de construir el poliedro estudiado con sus caras poligonales adecuadas y cuyos ángulos sólidos, que sucesivamente iremos obteniendo, sean al mismo tiempo todos iguales o simétricos.

Aun cuando debido al número limitado de casos (61) podríamos efectuar esta comprobación intentando acoplar materialmente polígonos planos regulares de lados iguales, recortado en cartulina el número y forma de los necesarios para cada caso hasta ver si su conjunto cierran espacio y al mismo tiempo resulten iguales o simétricos todos sus ángulos sólidos, consideramos que esta comprobación, al mismo tiempo que larga y penosa, no tiene ningún rigor matemático.

Por este motivo, prescindimos de ella y vamos a realizar la comprobación mediante un estudio topológico de cada caso particular.

3.1 Estudio topológico para la comprobación de la existencia de los posibles poliedros arquimedianos detallados en el párrafo 2.6.

El análisis topológico estudia las propiedades de las figuras geométricas que subsisten cuando dichas figuras se someten a deformaciones tan radicales que les hagan perder todas sus propiedades métricas y proyectivas.

En el estudio que vamos a realizar aplicaremos a cada poliedro, bajo el supuesto de que esté a hueco y su superficie suficientemente elástica (caucho p.e.), una transformación topológica consistente en suponer que previamente separamos una de sus caras y posteriormente deformamos la superficie restante hasta conseguir extenderla sobre un plano, con lo cual el número de polígonos planos es inferior en una unidad al del primitivo poliedro del que hemos suprimido una cara.

En esta transformación se alterarán arbitrariamente las formas de sus caras, sus ángulos y sus superficies, pero al ser biunívoca se conservará en la red plana de vértices y aristas resultante el número de ellas y la ordenación de sus caras, con lo cual al dibujar dicha red nos será posible discernir la existencia o no del poliedro estudiado. Admitiremos que la deformación aplicada transforma las aristas del poliedro en segmentos rectilíneos de magnitud arbitraria, con lo cual la red plana resultante tiene todos sus contornos poligonales rectos.

Como método general para la construcción y estudio de dicha red, partiremos del contorno de la cara inicial separada después de su deformación, que dibujaremos suficientemente ampliada y siempre como un polígono regular del mismo número de lados que el

de dicha cara. El interior de este contorno puede considerarse a su vez como el correspondiente al del polígono de la cara inicialmente suprimida que podemos considerar como restituida después de la transformación topológica aplicada; independientemente de dicha cara y sobrepuesta a la misma, aparecerá la red plana resultante de los restantes vértices y aristas del poliedro estudiado.

3.11 Angulos sólidos de cinco caras regulares no iguales

Caso 1 — $4P_3 + 1P_4$ — $C_3 = 32$ $C_4 = 6$ $V = 24$ $A = 60$

Supongamos separada una de sus caras cuadradas, de vértices 1·2·3·4, la cual, después de dilatada forma el contorno exterior de la red poligonal. (fig. 1).

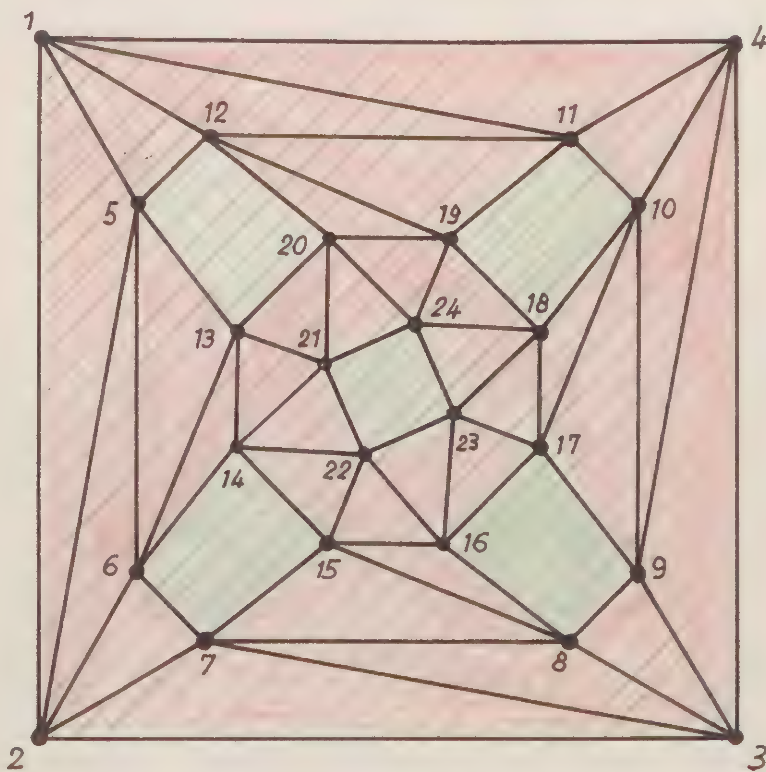


Figura 1

En el vértice 1 acoplamos los triángulos 1·2·5, 1·5·12, 1·12·11 y 1·11·4 que constituyen el ángulo sólido en 1, junto con la cara 1·2·3·4, produciéndose al mismo tiempo los nuevos vértices 5, 11, 12.

Pasamos seguidamente al vértice 2, donde tenemos representada la cara cuadrada 1·2·3·4 y los triángulos 1·2·5; completándolo con los



2-6-5, 2-7-6 y 2-3-7, apareciendo los nuevos vértices 6 y 7. Repitiendo el proceso en los vértices 3 y 4, conseguimos llegar de nuevo al 1 que se cierra sin dificultad, habiendo surgido los nuevos vértices 8, 9, 10 y 11. Tomando a continuación como base el octógono 5-6 ... 11-12, completaremos de forma análoga sus vértices y obtendremos el nuevo contorno octogonal 13-14 ... 19-20. Repitiendo en estos nuevos vértices el proceso anterior, conseguimos la terminación y cierre de la red plana con el cuadrado 21-22-23-24, lo cual nos confirma la existencia del caso que nos ocupa. La ordenación de las caras en sus ángulos sólidos es única. $(P_4 - P_3 - P_3 - P_3 - P_3)$ **Caso posible**

Caso 2 $\quad 4P_3 + 1P_5 \quad C_3 = 80 \quad C_5 = 12 \quad V = 60 \quad A = 150$

Supongamos separada una de sus caras pentagonales de vértices 1-2 ... 4-5, la cual, después de dilatada forma el contorno exterior de la red poligonal (figura 2).

Siguiendo el proceso general, acoplaremos en el vértice 1 las cuatro caras triangulares que lo completan, y sucesivamente en los restantes vértices del pentágono base, obteniendose el cierre sin dificultad con el anillo 1-2 ... 4-5, 6-7 ... 14-15. Tomando como base éste, volveremos a formar un segundo anillo (hasta el vértice 30), otro tercero (hasta el vértice 45), otro cuarto (hasta el vértice 55) y finalmente otro quinto

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 61 al 70

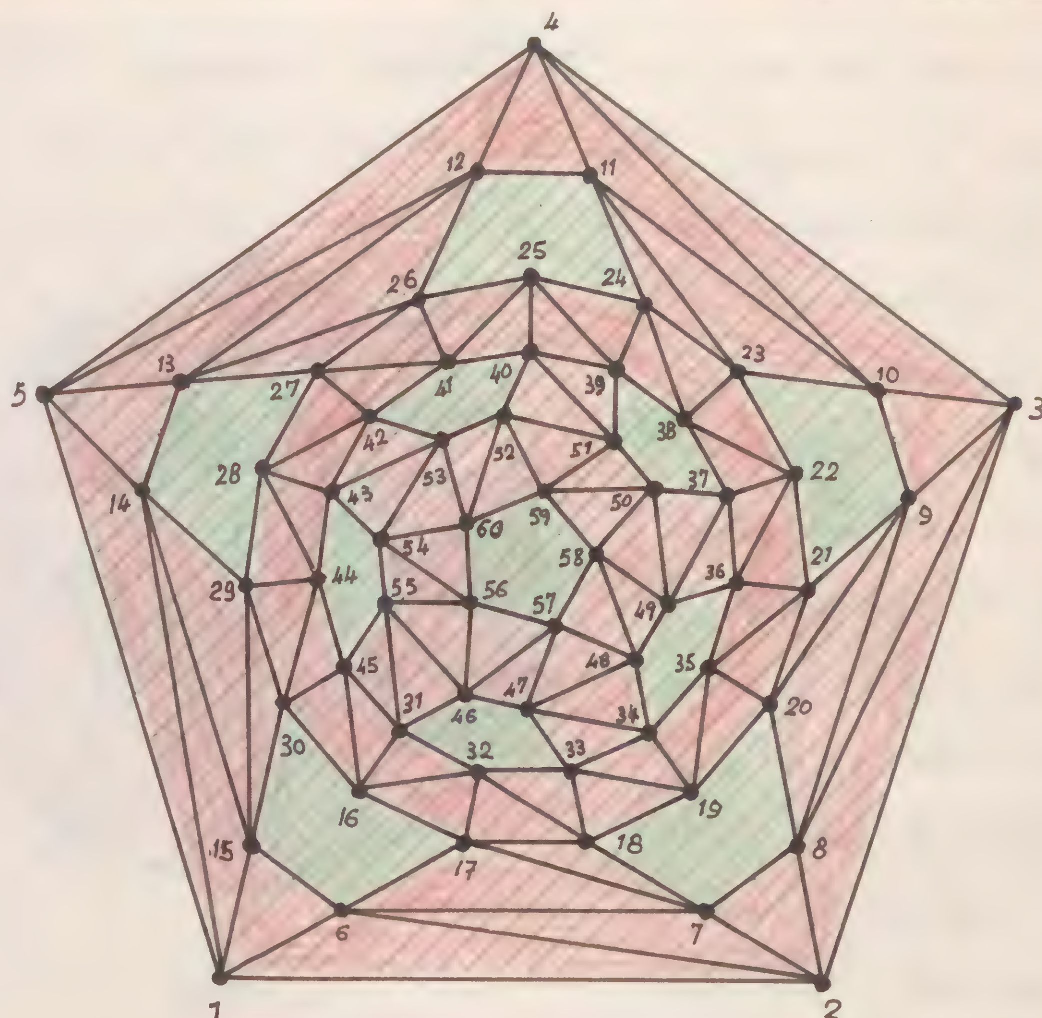


Figura 2

y último (hasta el vértice 60) que queda cerrado con una última cara pentagonal 56·57...59·60, lo cual nos confirma la existencia de este poliedro.

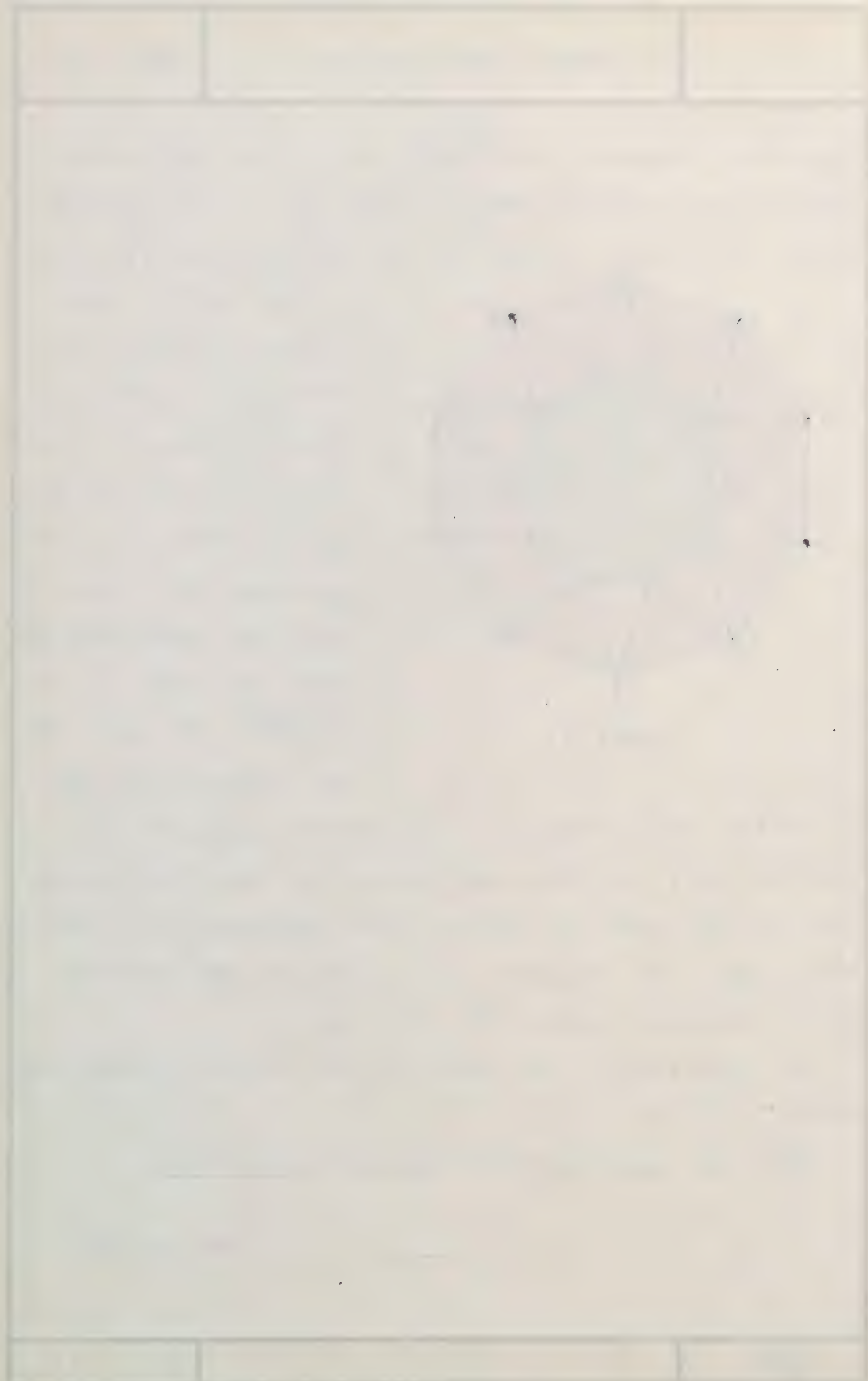
La ordenación de las caras en sus ángulos sólidos es única $(P_5 - P_3 - P_3 - P_3 - P_3)$.

Caso posible

3.12 Ángulos sólidos de cuatro caras regulares no iguales

Caso 3 $\quad 3\,P_3 + 1\,P_n \;(3<n<\infty) \quad C_3 = 2n \quad C_n = 2 \quad V = 2n \quad A = 4n$

Para el estudio topológico de este caso, en que una de las caras del ángulo sólido del poliedro es un polígono regular de cualquier número de lados, mayor de tres,



Caso 4 $2P_3 + 2P_4$ $C_3 = 8$ $C_4 = 6$ $V = 12$ $A = 24$

En este caso la ordenación de las caras en los ángulos sólidos del poliedro, puede hacerse bien colocando las caras iguales consecutivas, o alternadas ($P_3 - P_3 - P_4 - P_4$ ó $P_3 - P_4 - P_3 - P_4$). Estudiaremos separadamente ambas posibilidades.

4. A Caras iguales consecutivas ($P_3 - P_3 - P_4 - P_4$)

Siguiendo el proceso general, supongamos separada una de las caras cuadradas, de vértices 1·2·3·4, la cual, después de dilatada forma el contorno exterior inicial de la red poligonal (fig. 4).

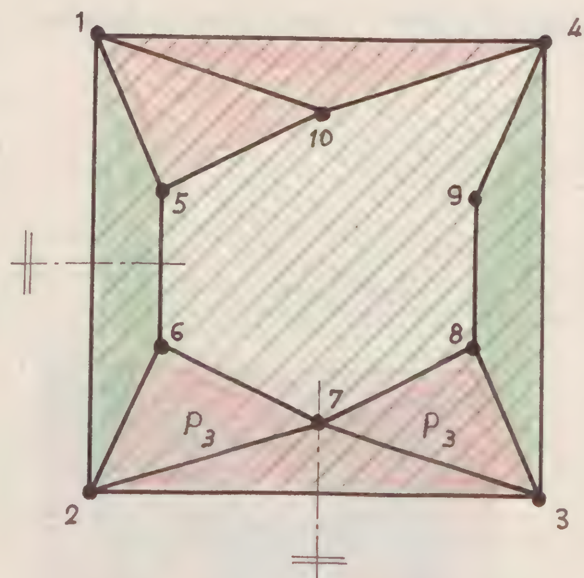


Figura 4

Completamos el vértice 1 con el cuadrado consecutivo 1·2·6·5 al cuadrado inicial 1·2·3·4, y con los dos triángulos consecutivos 1·5·10 y 1·10·4, que dan origen a los nuevos vértices 6, 5 y 10.

Pasamos a continuación a completar el vértice 2, en el que ya tenemos colocados los dos cuadrados consecutivos 1·2·3·4 y 1·2·6·5, con los dos triángulos también consecutivos 2·7·6 y 2·3·7, que dan origen al nue-

su vértice $\widehat{7}$.

Obsérvese que al pasar del vértice $\widehat{1}$ al consecutivo $\widehat{2}$, este último ángulo sólido es, en el espacio, simétrico del $\widehat{1}$ con respecto al plano mediatriz de la arista común $\overline{1\cdot2}$, ocurriendo lo mismo en los pasos sucesivos.

Completemos seguidamente el vértice $\widehat{3}$ con el triángulo $\overline{3\cdot8\cdot7}$ y el cuadrado $\overline{3\cdot4\cdot9\cdot8}$, simétrico al ángulo sólido $\widehat{2}$ con respecto al plano mediatriz de la arista común $\overline{2\cdot3}$, dando origen a los nuevos vértices 8 y 9.

Al llegar a este paso surge ya una contradicción en el vértice $\widehat{7}$, en el que se han formado tres triángulos (los $\overline{2\cdot7\cdot6}$, $\overline{2\cdot3\cdot7}$ y $\overline{3\cdot8\cdot7}$) en contradicción con la hipótesis, lo cual nos demuestra la imposibilidad de la existencia de este poliedro.

Caso no posible

---

4. B Caras iguales alternadas $(P_3 - P_4 - P_3 - P_4)$

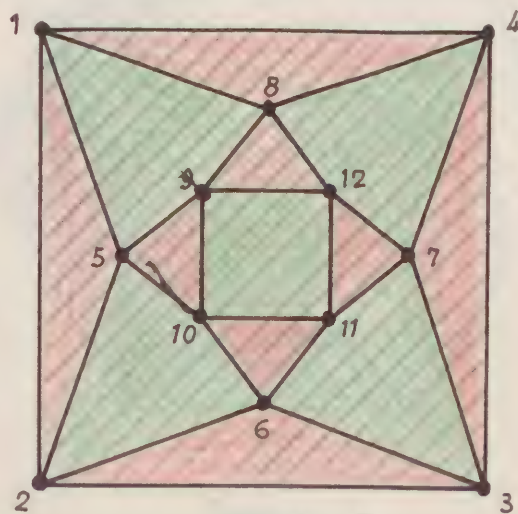


Figura 5

Siguiendo el proceso general, y partiendo de la base cuadrada $\overline{1\cdot2\cdot3\cdot4}$, obtenemos sin contradicción la red poligonal de la figura 5, cerrada con el cuadrado $\overline{9\cdot10\cdot11\cdot12}$,

al plano mediatriz de la arista 1-2, que origina el nuevo vértice 9. Seguidamente movemos el 3 simétrico del 2 donde origen a los nuevos vértices 10 y 11.

Al llegar a este paso queda alterada la ordenación de sus caras en el vértice 9, lo que nos demuestra la imposibilidad de existencia de este poliedro.

Caso no posible

6.B Caras iguales alternadas ($P_3 - P_4 - P_3 - P_6$)

Al igual que el anterior, seguiremos el mismo proceso inicial con la base exagonal 1·2...5·6. Iniciamos en el vértice 1 el complemento de las dos caras triangulares 1·2·8 y 1·18·6, alternadas con la cuadrada 1·8·7·18 (fig. 7).

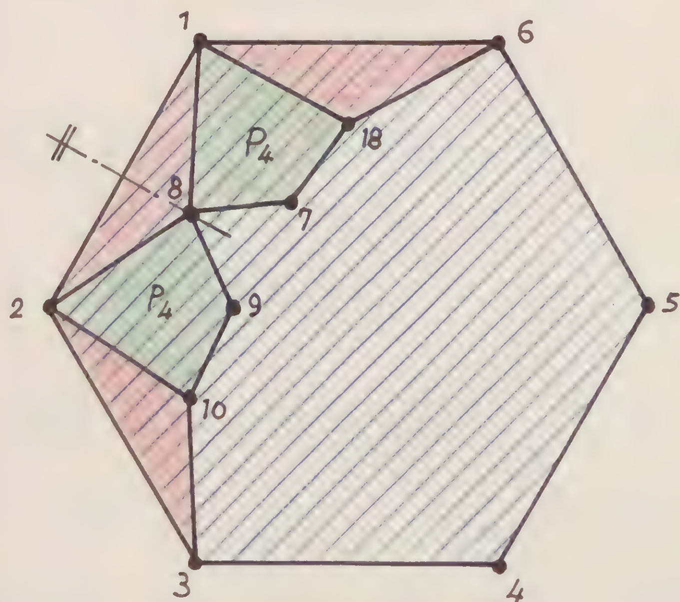


Figura 7

Al pasar a la construcción del vértice 2, simétrico del 1 con respecto a la arista común 1·2, surge de inmediato la formación del vértice 8, donde aparecen dos caras cuadradas 2·10·9·8 y 1·8·7·18, en contradicción con la hipótesis, lo cual nos demuestra la imposibilidad de

este poliedro.

Caso no posible

Casos 8, 9, 10 y 11

8. $2P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_8$
9. $2P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_9$
10. $2P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_{10}$
11. $2P_3 + 1\,P_4 + 1\,P_{11}$

Estos casos son análogos al número 6, estudiado anteriormente. Todos ellos tienen de común el de formar el ángulo sólido con dos caras triangulares, una cuadrada y una cuarta de lados variables y crecientes con respecto a la exagonal del caso 6. Por consiguiente, si se sigue el mismo el mismo proceso de formación del mencionado caso 6, llegaremos a las mismas conclusiones de imposibilidad tanto por las caras triangulares en forma consecutiva o alternadas con respecto a las dos restantes.

Casos no posibles

Caso 12 — $2\,P_3 + 2P_5$ — $C_3 = 20$ $C_5 = 12$ $V = 30$ $A = 60$

Este caso tambien presenta dos posibilidades de ordenacion, según coloquemos las caras iguales consecutivas $(P_3 - P_3 - P_5 - P_5)$ o alternadas $(P_3 - P_5 - P_3 - P_5)$. Estudiaremos independientemente cada una de ellas

12. A Bases iguales consecutivas ($P_3 - P_3 - P_5 - P_5$)

Partiendo de la base pentagonal 1·2 – 4·5 (fig. 8), y siguiendo el proceso general de construcción a partir del vértice 1 llegamos en el tercer paso (vértice 2) a una contradicción con la hipótesis, ya que en el vértice 10 se reunen tres triángulos equiláteros, lo cual nos demuestra la imposibilidad de existencia de este poliedro.

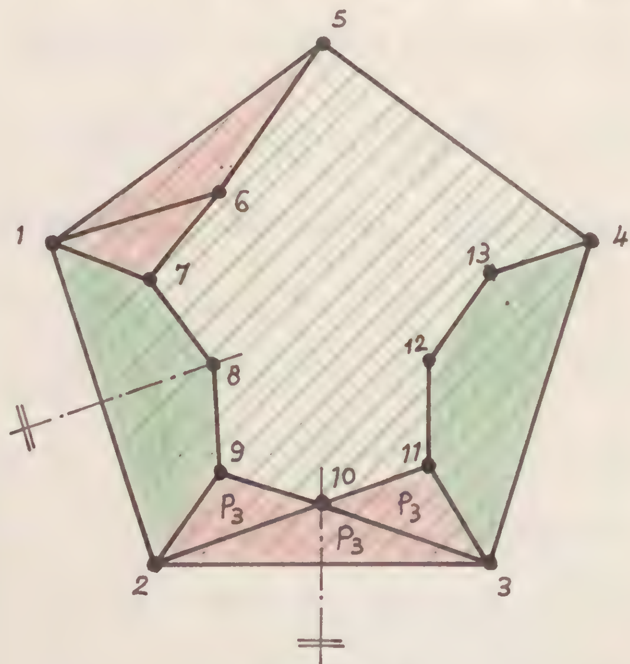


Figura 8

Caso no posible

12. B Bases iguales alternadas ($P_3 - P_5 - P_3 - P_5$)

Siguiendo el proceso anterior, con orden alternado de sus caras, podemos comprobar que el tamaño de la red poligonal representada en la figura 7, no tiene terminación alguna y llega a cerrarse en el pentágono central 26·27 – 29·30, lo cual nos demuestra la

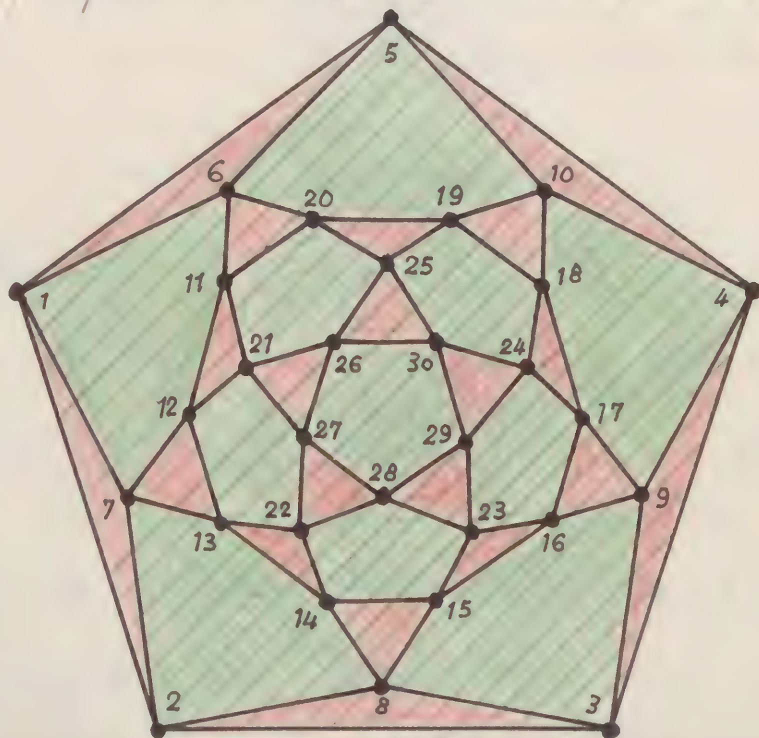
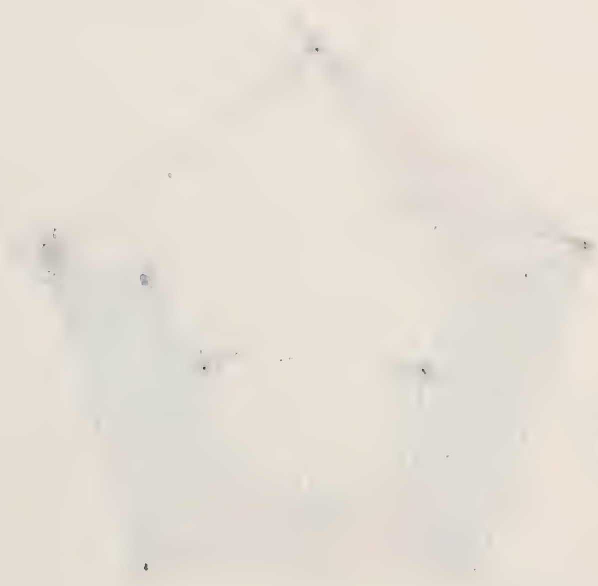


Figura 9





posibilidad de existencia de este poliedro

Caso posible

Caso 13 $2\,P_3 + 1\,P_5 + 1\,P_6$ $C_3 = 40$ $C_5 = 12$ $C_6 = 10$ $V = 60$ $A = 120$

Este caso presenta dos posibilidades de ordenación, según coloquemos las caras iguales consecutivas ($P_3 - P_3 - P_5 - P_6$), o alternadas con las dos restantes ($P_3 - P_5 - P_3 - P_6$).

Si lo comparamos con el caso 6, del cual puede obtenerse éste por sustitución de P_4 por P_5 y seguimos el mismo trazado de la figura 6 para la primera variante y el de la figura 7 para la segunda, cambiando la cara cuadrada por la pentagonal, llegaremos a las mismas conclusiones de incompatibilidad que nos demuestran la imposibilidad de existencia de este poliedro.

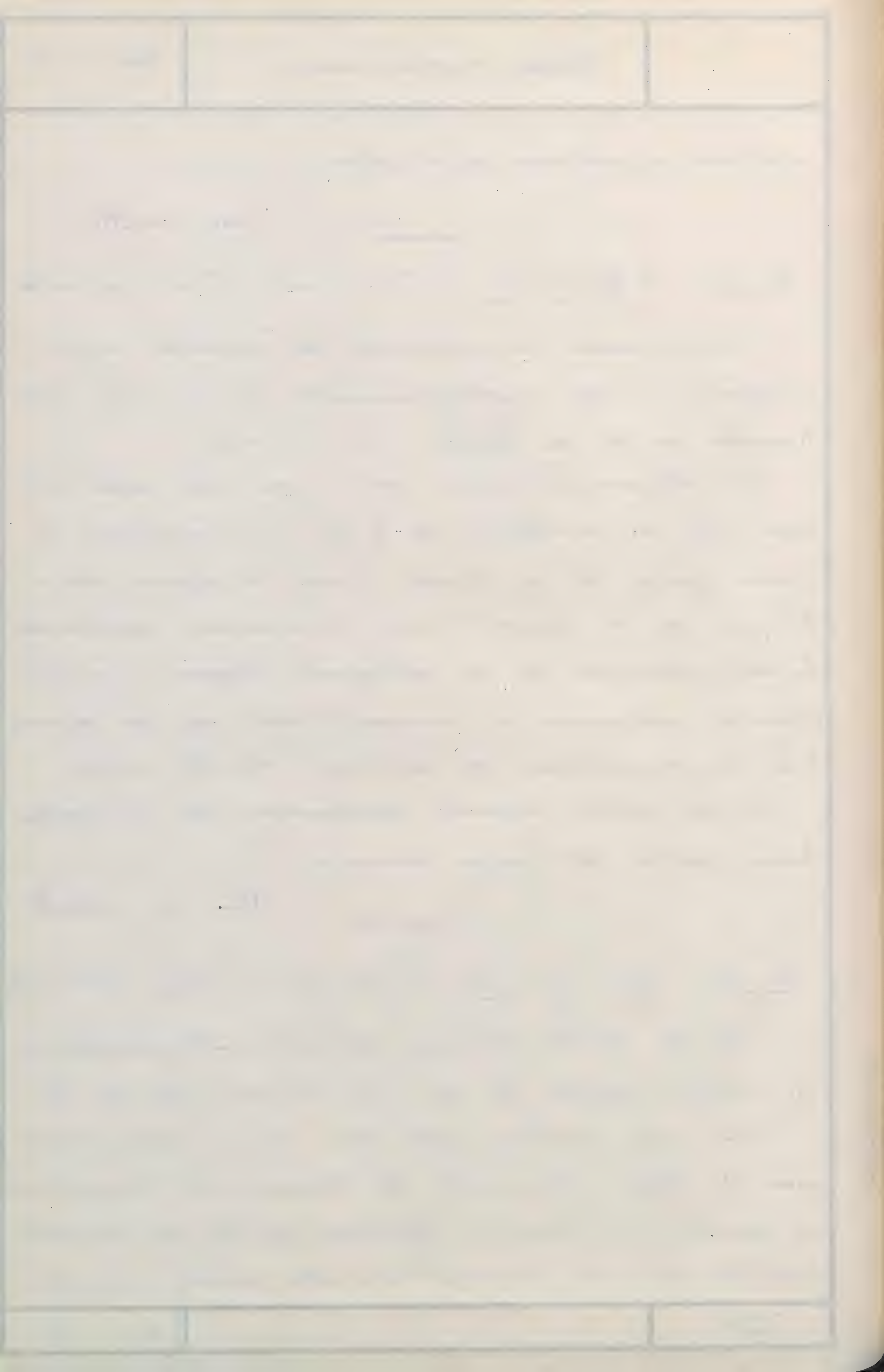
Por los motivos expuestos prescindimos de la representación gráfica de ambas variantes.

Caso no posible

Caso 14 $2\,P_3 + 1\,P_5 + 1\,P_7$ $C_3 = 140$ $C_5 = 42$ $C_7 = 30$ $V = 210$ $A = 420$

Este caso puede deducirse del anterior nº 13, al sustituir el exágono regular P_6 por el eptágono regular P_7.

Como esta sustitución sólo altera en su figura topológica el polígono base, origen del trazado, esta circunstancia no cambia la secuencia del mismo, por lo que se presentarán las mismas incompatibilidades puestas en eviden-



-ción en las figuras 6 y 7, que nos demuestran la imposibilidad de existencia de este poliedro.

Caso no posible

Caso 15 $\quad 1\,P_3 - 3\,P_4 \quad C_3 = 8 \quad C_4 = 18 \quad V = 24 \quad A = 48$

Este caso solo tiene una ordenación única en la colocación de sus caras.

El proceso general, aplicado al mismo, partiendo de una de las caras cuadradas que, después de dilatada, forma el contorno 1-2-3-4 de la red poligonal (fig. 10), da lugar al trazado cerrado de dicha figura que nos demuestra la posibilidad de existencia de este poliedro.

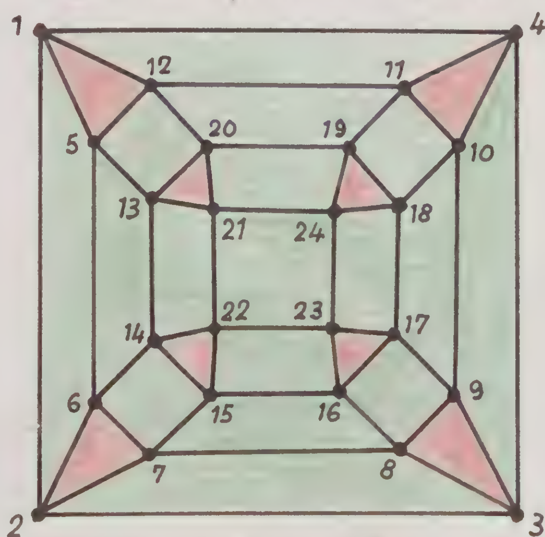


Figura 10

Caso posible

Caso 16 $\quad 1\,P_3 - 2\,P_4 - 1\,P_5 \quad C_3 = 20 \quad C_4 = 30 \quad C_5 = 12 \quad V = 60 \quad A = 120$

Este caso admite dos posibilidades de ordenación de sus caras en los ángulos sólidos, pudiéndose disponer los dos cuadrados P_4 consecutivamente $(P_3 - P_4 - P_4 - P_5)$, o alternados con los otros dos polígonos desiguales $(P_3 - P_4 - P_5 - P_4)$. Estudiaremos separadamente ambas posibilidades.

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 71 al 80

16. A Caras iguales consecutivas ($P_3 - P_4 - P_4 - P_5$).

El proceso general aplicado a este caso, partiendo de la cara pentagonal $\overline{1 \cdot 2 \ldots 4 \cdot 5}$, nos conduce al trazado realizado en la figura 11, donde al completar el vértice $\widehat{5}$, surge contradicción con la hipótesis al obtener en el nuevo vértice $\widehat{10}$ la adyacencia consecutiva de sus caras iguales, lo que nos demuestra la imposibilidad de existencia de este poliedro.

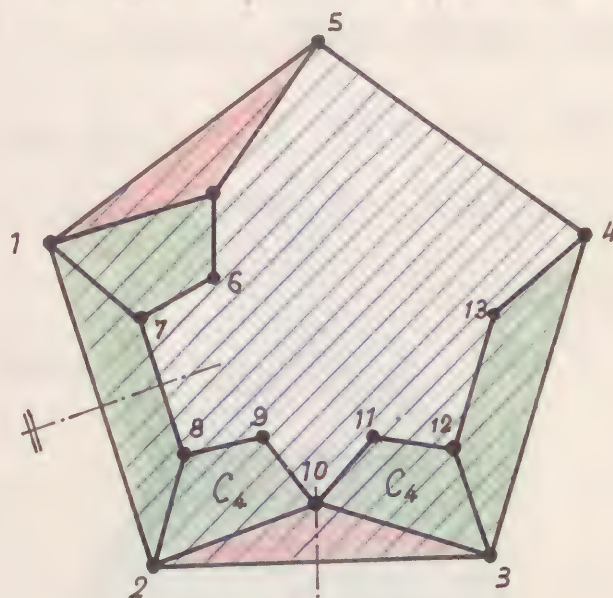


Figura 11

Caso no posible

16. B Caras iguales alternadas ($P_3 - P_4 - P_5 - P_4$)

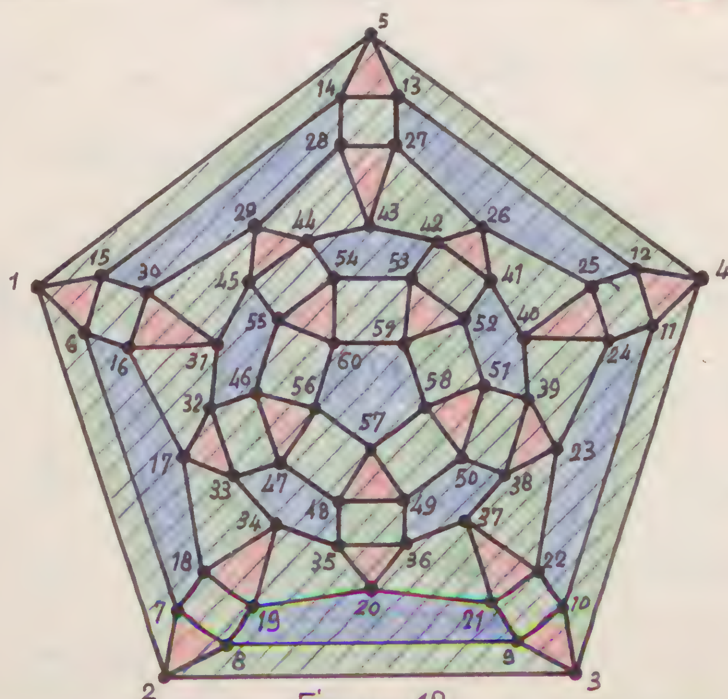
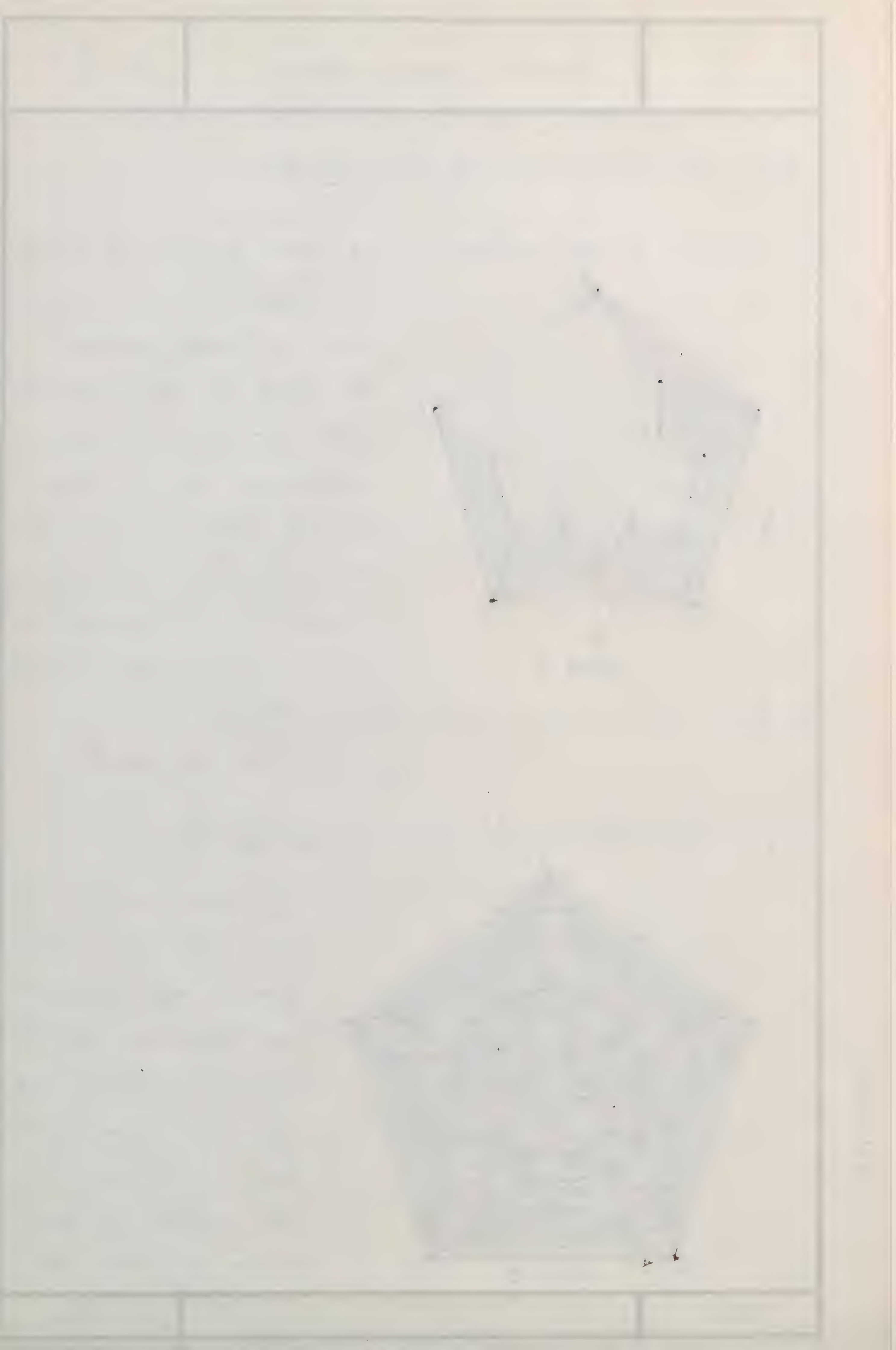


Figura 12

El proceso general aplicado a este caso y partiendo de una cara pentagonal que, después de dilatada, forma el contorno $\overline{1 \cdot 2 .. 4 \cdot 5}$ (fig. 12) de la red poligonal, da lugar al trazado cerrado de dicha figura, que nos de-



muestra la posibilidad de existencia de este poliedro.

Caso posible

3.13 Ángulos sólidos de tres caras regulares no iguales

Caso 19 El estudio de este caso lo haremos incluyéndolo en el número 122, del cual es un caso particular $(2P_4 + 1P_3)$.

Caso 52 $1P_3 + 2P_6$ $C_3 = 4$ $C_6 = 4$ $V = 12$ $A = 18$

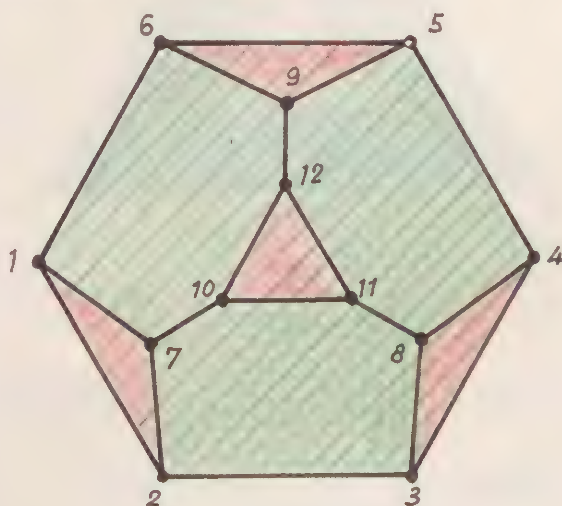


Figura 13

El proceso general, aplicado a este caso y partiendo de una corona exagonal que, después de dilatada forma el contorno exterior 1·2 ... 5·6 de la red poligonal (fig. 13), da lugar al trazado cerrado de dicha figura que nos demuestra la posibilidad de existencia de este poliedro.

Caso posible

Caso 53 $1P_3 + 1P_6 + 1P_n$ $(6 < n < \infty)$ $C_3 = \frac{2}{3}n$ $C_6 = \frac{1}{3}n$

$C_n = 2$ $V = 2n$ $A = 3n$

Al analizar este caso en el párrafo 2,53 hemos demostrado que la posibilidad de su existencia puede realizarse con los valores de n de 9, 12, 15, 18 .... lo que supone infi-

estas soluciones posibles.

Observemos previamente que cuando $n > 5$, los tres polígonos que forman un ángulo sólido en cualquiera de los posibles poliedros, son desiguales, y que al menos uno de ellos, el P_3, es de un número impar de lados.

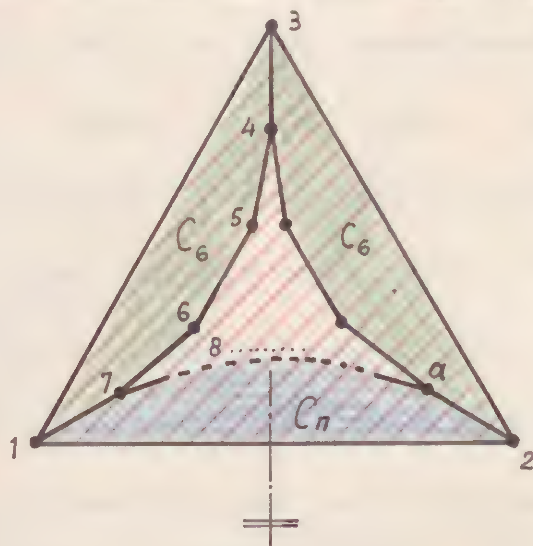


Figura 14

Siguiendo el proceso general, supongamos separada la cara P_3 de número impar de lados y vértices $1\cdot2\cdot3$ (fig. 14), la cual después de dilatada forma el contorno inicial de la red.

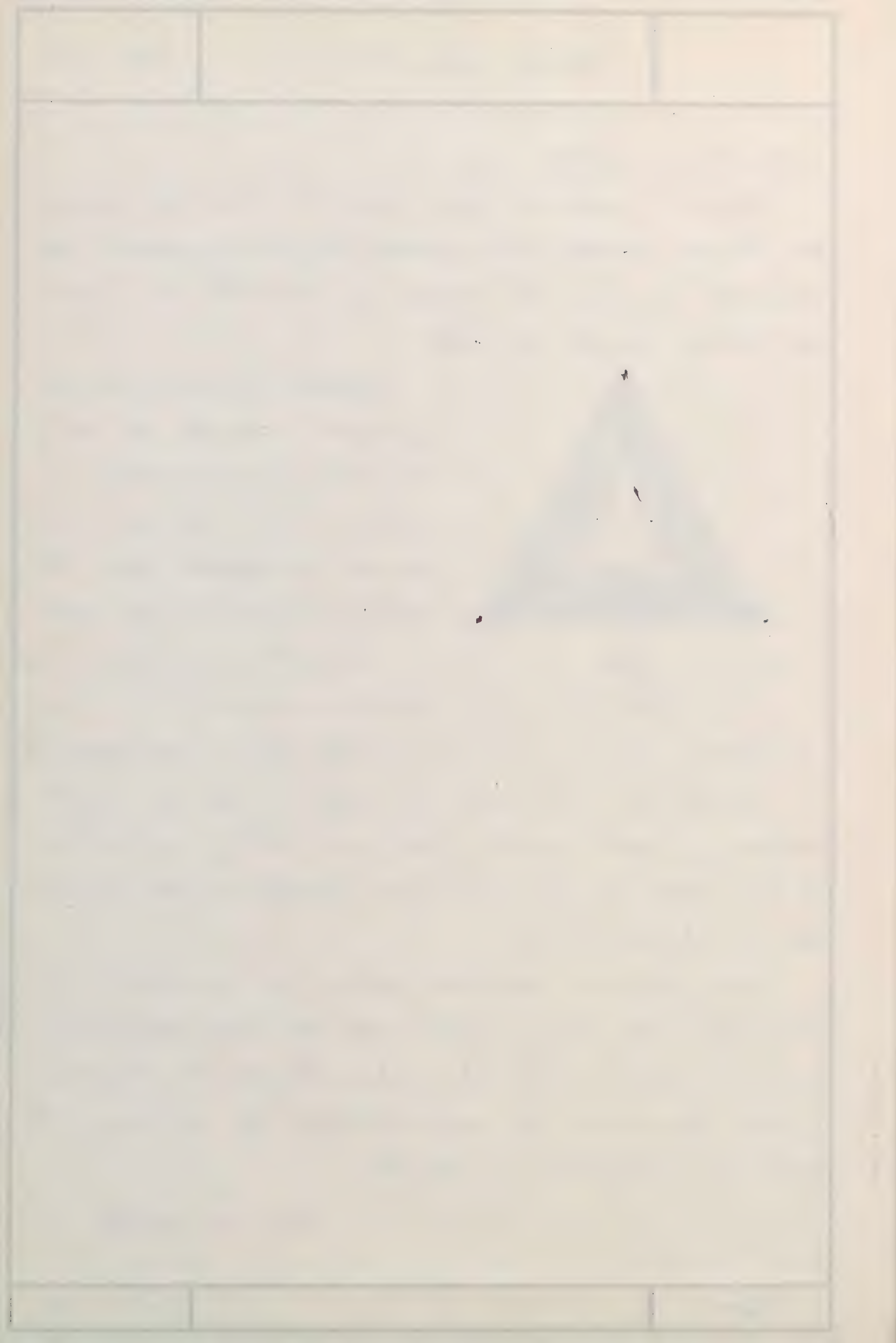
Completemos el vértice 1 con el exágono $1\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3$ y con el polígono $1\cdot2\cdot a \ldots 8\cdot7\cdot1$, de n lados y arista común $1\cdot7$.

Procedamos a completar el vértice 2 con un nuevo exágono y arista común $a\cdot2$ con el P_n; este vértice 2 será pues simétrico al 1 con respecto al plano mediatriz de la arista $1\cdot2$.

Esta segunda operación origina en el vértice 3 la formación del ángulo sólido con dos caras iguales C_6 y arista común $3\cdot4$, lo cual contradice la hipótesis, y nos demuestra la imposibilidad de existencia de esta serie infinita de poliedros.

Caso no posible

UNE A4 210 X 297



Antes de dar por terminado el estudio de este caso vamos a deducir conclusiones más generales que nos simplificarán el estudio de los casos restantes.

En primer lugar, podremos observar que si en lugar de partir de un triángulo equilátero $\widehat{P_3}$, partimos de un polígono de cualquier número impar de lados, que forme una cara del ángulo sólido, siendo las otras dos caras desiguales, al cerrar el primer ciclo de la red poligonal, nos encontraríamos siempre en el último vértice con dos caras contiguas iguales, ya que en cada vértice formado, sus caras están ordenadas simétricamente al del anterior con respecto a su arista común, y al ser impar el número de lados del polígono base se obtienen al mismo tiempo ángulos poliedros iguales de forma alternativa, ocurriendo lo mismo con sus simétricos que también son alternativamente iguales, por lo que al final coincide un vértice con su simétrico, que nos demuestra la imposibilidad de su existencia. Por consiguiente:

6ª) "<u>No puede existir un poliedro arquimediano de vértices triedros si sus caras son desiguales y una de ellas, al menos, tiene un número impar de lados</u>"

También podemos pensar en que si el triedro tiene

dos caras iguales y los polígonos de éstas son de lados impares, podemos iniciar siempre la red poligonal por uno de los polígonos de lados impares, en cuyo caso debe completarse cada vértice con dos polígonos desiguales lo cual nos dará siempre la contradicción expresada en la figura 14, al terminar el primer ciclo. Por consiguiente:

7ª) No puede existir un poliedro arquimediano de vértices triedros si teniendo dos caras iguales son éstas de un número impar de lados.

Casos 61 - 68 - 77 - 82 - 83 - 85 - 87 - 88 (véase detalle al dorso)

De acuerdo con la condición 1ª del caso 53, no pueden existir estos poliedros.

Casos no posibles

Caso 89 $1P_3 + 2P_8$ $C_3 = 8$ $C_8 = 6$ V = 24 A = 36

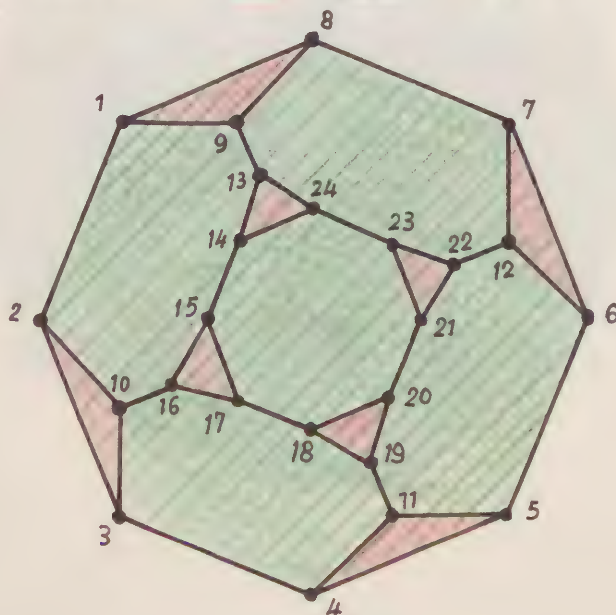


Figura 15

El proceso general, aplicado a este caso, partiendo de la cara octogonal 1·2...7·8, (fig. 15) da lugar al trazado cerrado de la red poligonal representada en dicha figura, que nos demuestra la posibilidad de existencia de este poliedro.

Caso posible

UNE A4 210 X 297

Caso	61	$1 P_3 + 1 P_7 + 1 P_{14}$
"	68	$1 P_3 + 1 P_7 + 1 P_{21}$
"	77	$1 P_3 + 1 P_7 + 1 P_{30}$
"	82	$1 P_3 + 1 P_7 + 1 P_{35}$
"	83	$1 P_3 + 1 P_7 + 1 P_{36}$
"	85	$1 P_3 + 1 P_7 + 1 P_{38}$
"	87	$1 P_3 + 1 P_7 + 1 P_{40}$
"	88	$1 P_3 + 1 P_7 + 1 P_{41}$

Casos 93 - 97 - 99 - 101 - 103 (ver detalle al dorso)

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53 no tienen existencia real estos poliedros.

Casos no posibles

Caso 105 $1 P_3 + 2 P_9$

De acuerdo con la condición 7ª del caso 53, no tiene existencia real este poliedro.

Caso no posible

Casos 108 - 110 - 112 (ver detalle al dorso)

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53 no tienen existencia real estos poliedros.

Casos no posibles.

Caso 114 $1 P_3 + 2 P_{10}$ $C_3 = 20$ $C_{10} = 12$ $V = 60$ $A = 90$

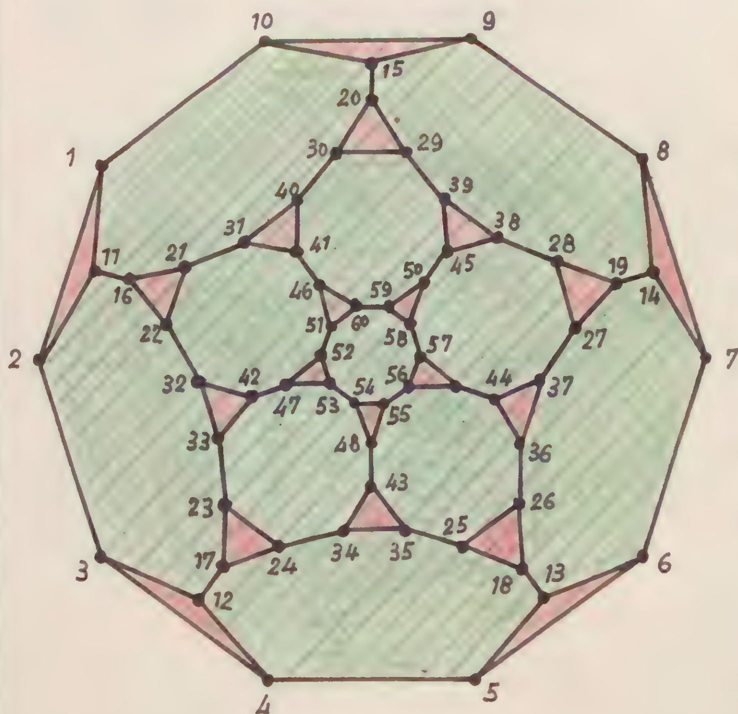


Figura 16

El proceso general aplicado a este caso, partiendo de la corona P_{10}, de vértices 1 ... 9·10 (fig. 16) da lugar al trazado cerrado de la red poligonal representada en dicha figura, que nos demuestra la posibilidad de existencia de este poliedro.

Caso posible

[illegible]	93	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{12}$
"	97	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{16}$
"	99	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{18}$
"	101	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{20}$
"	103	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{22}$
"	108	$1P_3 + 1P_8 + 1P_{12}$
"	110	$1P_3 + 1P_9 + 1P_{14}$
"	112	$1P_3 + 1P_9 + 1P_{[illegible]}$

Caso 116 - 118 (ver detalle al dorso)

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53, no tienen existencia real estos poliedros.

Casos no posibles

Caso 119 $1P_3 + 3P_{11}$

De acuerdo con la condición 7ª del caso 53 no tiene existencia real este poliedro.

Caso no posible

Caso 120 - 121 (ver detalle al dorso

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53, no tienen existencia real estos poliedros.

Casos no posibles

Caso 122 $2P_4 + 1P_n$ $(2 < n < \infty)$ $C_4 = n$ $C_n = 2$ $V = 2n$ $A = 3n$

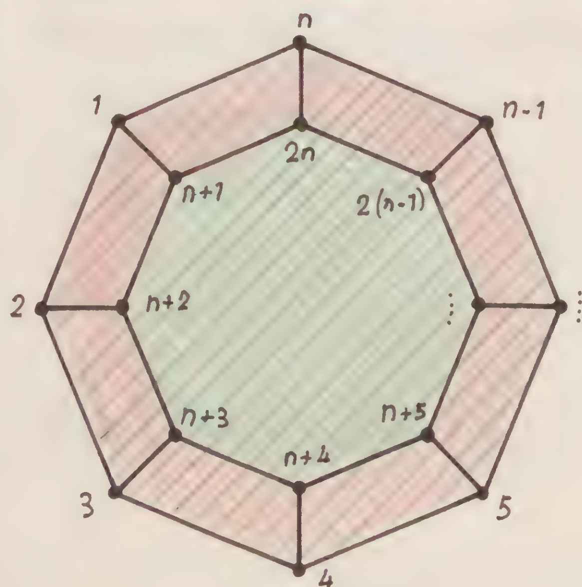


Figura 17

Para el estudio topológico de este caso, en que una de las caras del ángulo sólido es un polígono regular de cualquier número de lados, por ser que dos supondremos separada inicialmente una de las dos únicas caras no cuadradas del poliedro, la cual, después de dilatada forma el contorno exterior $\overline{1 \cdot 2 \ldots (n-1) \cdot n}$ de la red poligonal (fig. 17).

Riso	115	$1 P_3 + 1 P_{10} + 1 P_{[illegible]}$
"	118	$1 P_3 + 1 P_{10} + 1 P_{18}$
"	120	$1 P_3 + 1 P_{11} + 1 P_{12}$
"	121	$1 P_3 + 1 P_{11} + 1 P_{13}$

Siguiendo el proceso general, acoplaremos en el vértice 1 las dos caras cuadradas que le completan, e igualmente en los restantes vértices del polígono base, obteniéndose el cierre sin dificultad al volver al vértice 1 de partida. Con este proceso obtenemos otros n vértices del poliedro, que numerados sucesivamente desde el $n+1$ al $2n$, nos permitirán cerrar la figura con la segunda y última cara P_n del poliedro y con ello confirmamos la existencia del mismo para cualquier valor de $2 < n < \infty$.

La ordenación de las caras en un ángulo sólido, es única $(P_n - P_4 - P_4)$.

Este caso presenta pues, infinitas soluciones.

Caso posible

Casos 128 - 130 - 133 - 134 - 136 - 137 (ver detalle al dorso)

De acuerdo con la condición 6ª del caso nº 53, no tienen existencia real estos poliedros.

Casos no posibles

Caso 138 $1P_4 + 2P_6$ $C_4 = 6$ $C_6 = 8$ $V = 24$ $A = 36$

El proceso general aplicado a este caso, partiendo de una cara exagonal 1·2 ... 5·6 (fig. 18) da lugar al trazado cerrado de la red poligonal representada en dicha fi-

Caso	128	$1P_2 + 1P_5 + 1P_{10}$
"	130	$1P_2 + 1P_5 + 1P_{12}$
"	133	$1P_2 + 1P_5 + 1P_{15}$
"	134	$1P_2 + 1P_5 + 1P_{16}$
"	136	$1P_2 + 1P_5 + 1P_{18}$
"	137	$1P_2 + 1P_5 + 1P_{19}$

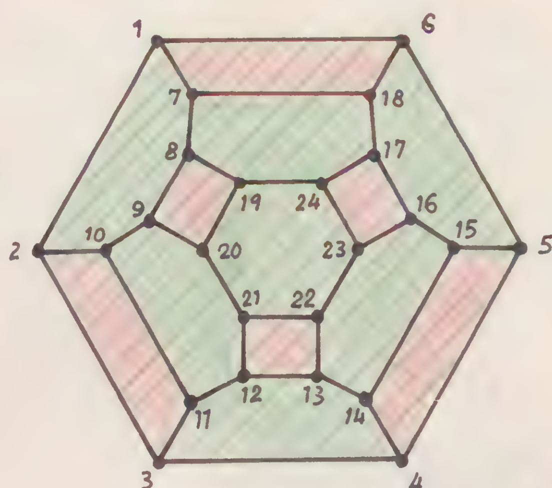


Figura 18

gura, que nos demuestra la posibilidad de construcción de este poliedro.

Caso posible

Caso 140 — 1 P_4 + 1 P_6 + 1 P_8 — $C_4 = 12$ $C_6 = 8$ $C_8 = 6$ $V = 48$ $A = 72$

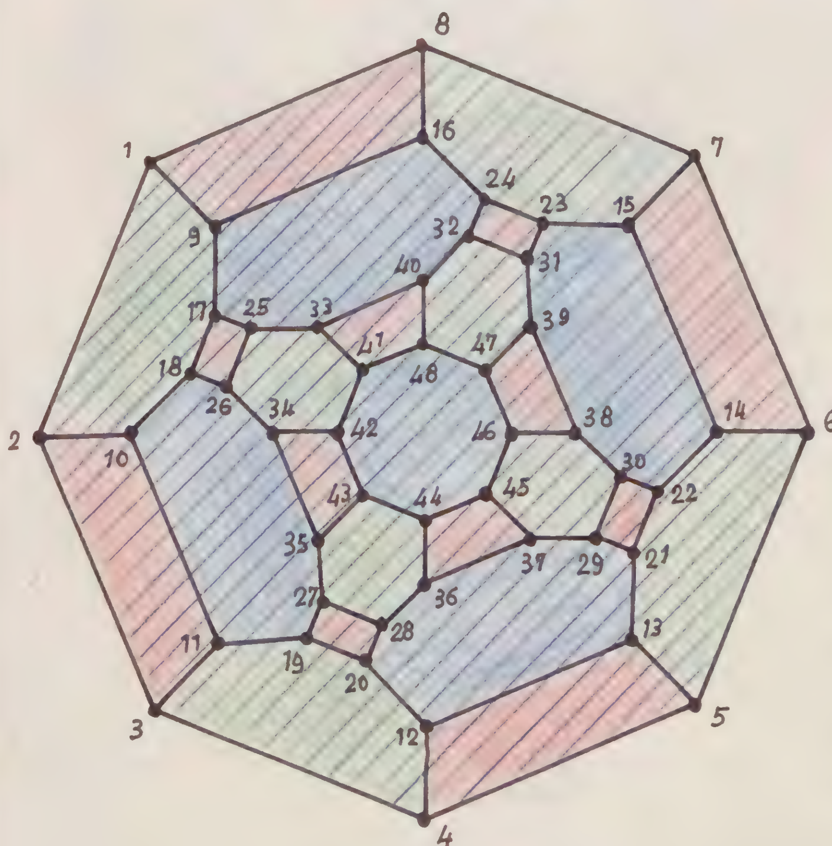


Figura 19

El proceso general aplicado a este caso, partiendo de una cara integrante [1·2 ... 7·8] (fig. 19) da lugar al trazado cerrado de la red poligonal representada en dicha figura, que nos demuestra la posibilidad de construcción de este poliedro.

Caso posible

UNE A4 210 X 297

Caso 141 $1P_4 + 1P_6 + 1P_9$

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53, no tiene existencia real este poliedro.

Caso no posible

Caso 142 $1P_4 + 1P_6 + 1P_{10}$ $C_4 = 30$ $C_6 = 20$ $C_{10} = 12$ $V = 120$ $A = 180$

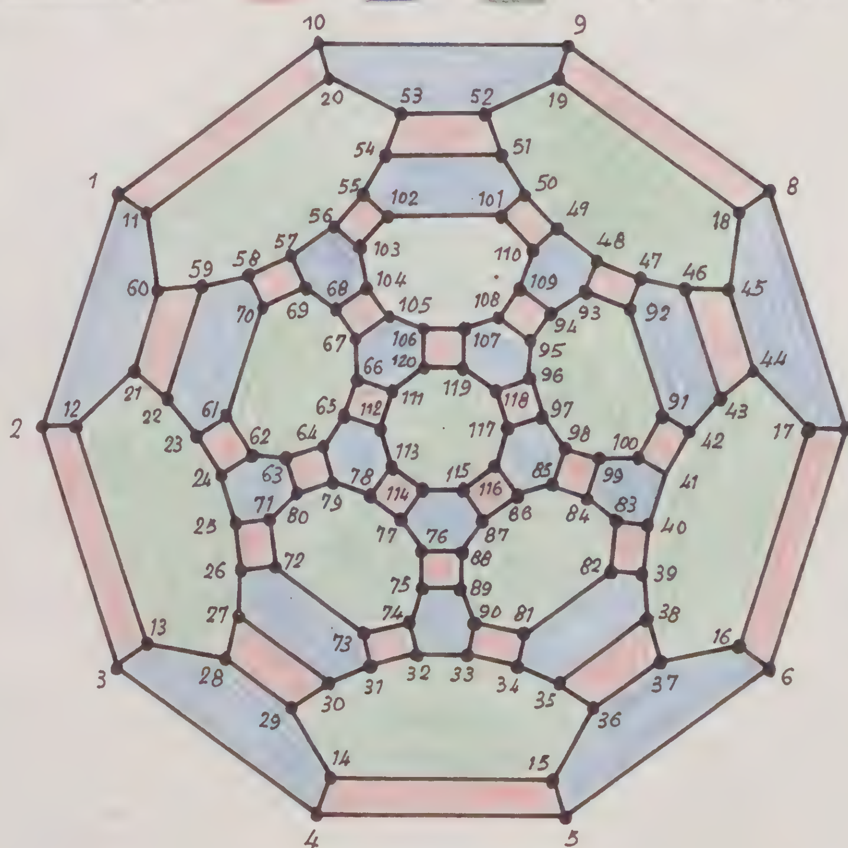


Figura 20

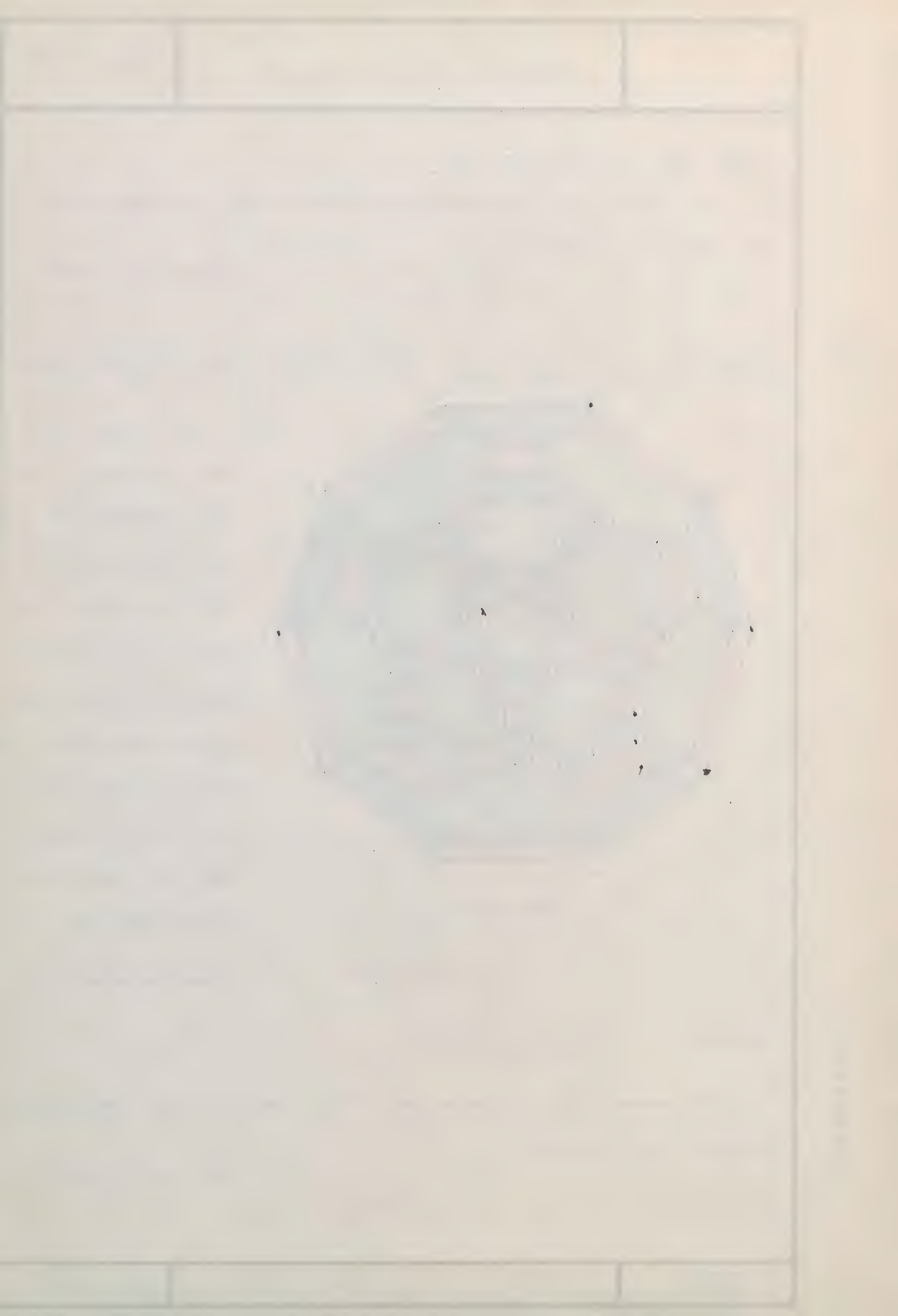
Se muestra general respondiendo a este caso, partiendo de una cara diagonal 1·2... 9·10 (fig. 20), da lugar al trazado cerrado de la red poligonal representada en dicha figura, que nos demuestra la posibilidad de existencia de este poliedro.

Caso posible

Caso 143 $1P_4 + 1P_6 + 1P_{11}$

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53, no tiene existencia real este poliedro.

Caso no posible



POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 81 al 90

Caso 144 $1 P_4 + 2 P_7$

De acuerdo con la condición 7ª del caso 53, no tiene existencia real este poliedro.

Caso no posible

Caso 145 - 146

145	$1 P_4 + 1 P_7 + 1 P_8$
146	$1 P_4 + 1 P_7 + 1 P_9$

De acuerdo con la condición 6ª del caso 53, no tienen existencia real estos poliedros.

Casos no posibles

Casos 147 - 149 - 150

147	$2 P_5 + 1 P_6$
149	$2 P_5 + 1 P_8$
150	$2 P_5 + 1 P_9$

De acuerdo con la condición 7ª del caso 53, no tienen existencia real estos poliedros.

Casos no posibles

Caso 151 $1 P_5 + 2 P_6$ $C_5 = 12$ $C_6 = 20$ $V = 60$ $A = 90$

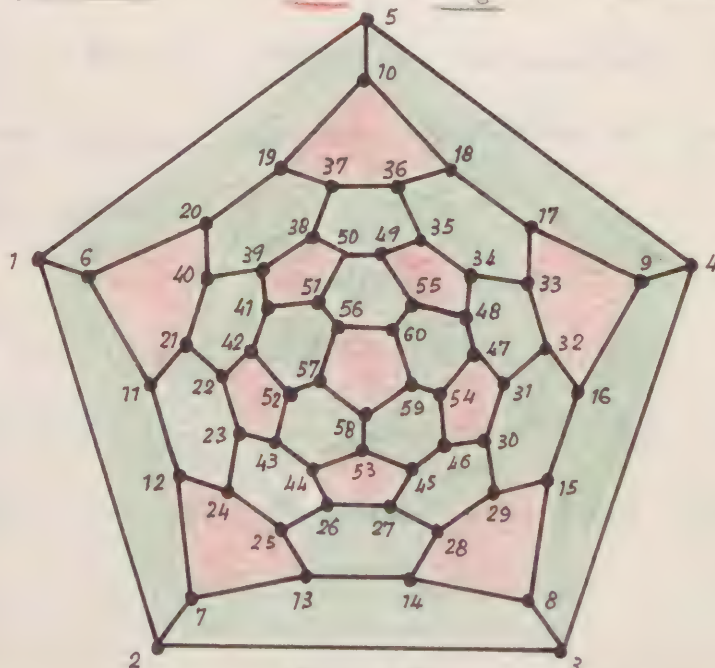


Figura 21

El proceso general, aplicado a este caso, partiendo de una cara pentagonal $\overline{1\text{-}2 \ldots 4\text{-}5}$ (fig. 21), da lugar al trazado cerrado de la red poligonal representada en dicha figura, que nos demuestra la posibilidad de existencia de es-

te poliedro.

Caso posible.

Caso 152 $1P_5 - 1P_6 - 1P_7$

De acuerdo con la condición 1ª del caso 52. no tiene existencia real este poliedro

Caso no posible

---

4. Resumen general de los únicos poliedros arquimedianos que, de acuerdo con su definición, pueden construirse geométricamente en el espacio euclidiano.

Después de la selección topológica realizada entre los posibles poliedros que cumplen las condiciones 1ª a 5ª establecidas en los párrafos 2.1 y 2.4, obtenemos un número definitivo de de soluciones que vamos a clasificar en dos grupos.

En el primero incluimos los casos en que se obtiene una solución individual para un determinado ángulo sólido.

En el segundo incluiremos los casos en que se obtienen infinitas soluciones para un determinado ángulo sólido en el que varía tan sólo el número de lados de uno de los polígonos que forman sus caras.

Estas soluciones definitivas son las siguiente:

Poliedros arquimedianos de solución única:

[illegible]

I	Caso 1	$4 P_3 + 1 P_4$	$C_3 = 32$	$C_4 = 6$	$V = 24$	$A = 60$	
II	" 2	$4 P_3 + 1 P_5$	$C_3 = 80$	$C_5 = 12$	$V = 60$	$A = 150$	
III	" 4B	$2 P_3 + 2 P_4$	$C_3 = 8$	$C_4 = 6$	$V = 12$	$A = 24$	
IV	" 12B	$2 P_3 + 2 P_5$	$C_3 = 20$	$C_5 = 12$	$V = 30$	$A = 60$	
V	" 15	$1 P_3 + 3 P_4$	$C_3 = 8$	$C_4 = 18$	$V = 24$	$A = 48$	
VI	" 16B	$1 P_3 + 2 P_4 + 1 P_5$	$C_3 = 20$	$C_4 = 30$	$C_5 = 12$	$V = 60$	$A = 120$
VII	" 52	$1 P_3 + 2 P_6$	$C_3 = 4$	$C_6 = 4$	$V = 12$	$A = 18$	
VIII	" 89	$1 P_3 + 2 P_8$	$C_3 = 8$	$C_8 = 6$	$V = 24$	$A = 36$	
IX	" 114	$1 P_3 + 2 P_{10}$	$C_3 = 20$	$C_{10} = 12$	$V = 60$	$A = 90$	
X	" 138	$1 P_4 + 2 P_6$	$C_4 = 6$	$C_6 = 8$	$V = 24$	$A = 36$	
XI	" 140	$1 P_4 + 1 P_6 + 1 P_8$	$C_4 = 12$	$C_6 = 8$	$C_8 = 6$	$V = 48$	$A = 72$
XII	" 142	$1 P_4 + 1 P_6 + 1 P_{10}$	$C_4 = 30$	$C_6 = 20$	$C_{10} = 12$	$V = 120$	$A = 180$
XIII	" 151	$1 P_5 + 2 P_6$	$C_5 = 12$	$C_6 = 20$	$V = 60$	$A = 90$	

Poliedros arquimedianos de infinitas soluciones:

[illegible]

Serie A_n	Caso 3	$3 P_3 + 1 P_n$	$(3 < n < \infty)$	$C_3 = 2n$	$C_n = 2$	$V = 2n$	$A = 4n$
Serie B_n	" 122	$2 P_4 + 1 P_n$	$(2 < n < \infty)$	$C_4 = n$	$C_n = 2$	$V = 2n$	$A = 3n$

Independientemente de la nomenclatura que emplearemos para la designación de los trece poliedros del primer grupo, ordenamos éstos con cifras romanas correlativas del uno al trece.

Para los dos únicos casos del segundo grupo, llamaremos Serie A_n a los infinitos poliedros de (ángulos sólidos con) tres caras triangulares, y

una poligonal de cualquier número de lados, y Serie B a los infinitos poliedros de ángulos sólidos con dos caras cuadradas y una poligonal de cualquier número de lados.

CAPITULO II

Estudio conjunto del cálculo analítico de las principales magnitudes de los poliedros arquimedianos, de su representación gráfica directa en el Sistema diédrico y de su representación gráfico-analítica como aplicación del cálculo analítico.

5. Propiedades geométricas de los poliedros arquimedianos.

Establecida en el párrafo 4, la existencia de los trece únicos poliedros arquimedianos de tipo individual para un determinado ángulo sólido, a los que nos referiremos en lo sucesivo por el número de orden dado en cifras romanas (I al XIII), y dos series infinitas de poliedros arquimedianos con ángulos sólidos análogos en cada serie, que hemos denominado Serie A y Serie B respectivamente, vamos a establecer propiedades geométricas comunes a todos ellos.

5.1 Las aristas de un poliedro arquimediano son todas iguales.

En efecto, siendo cada arista lado común de dos po-

lígonos que forman dos caras contiguas, y siendo este polígono, por definición regular, cada arista tendrá la misma longitud que los lados de ambos polígonos contiguos, cuyos restantes lados son a su vez aristas del poliedro.

5.2 En todo poliedro arquimediano existe una esfera que pasa por todos los vértices del mismo. Dicha esfera será pues circunscrita al poliedro y éste inscrito en aquélla

5.21 Para su demostración, consideremos primeramente aquellos poliedros arquimedianos cuyos ángulos sólidos son triedros.

Éste grupo lo forman los arquimedianos VII al XIII y los infinitos de la Serie B.

En todos ellos existen, al menos, dos caras desiguales, y si además hay dos iguales, éstas no son triangulares.

Sean (fig. 22) $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ los polígonos correspondientes a las dos caras desiguales (una de ellas puede ser triangular) de $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ lados respectivamente, cuya arista común es $\widehat{M\text{-}N}$. Tracemos

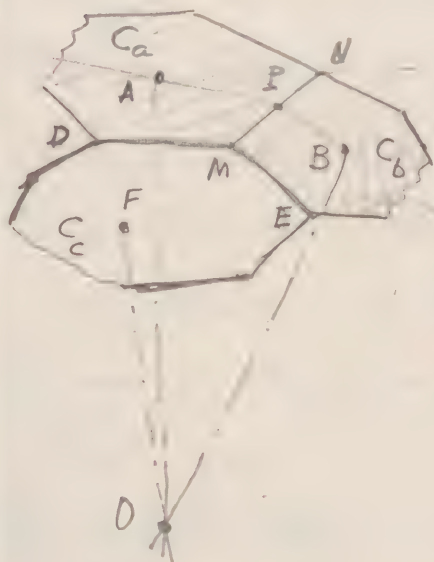


Figura 22

por el punto $\widehat{P}$, medio del segmento $\widehat{M\text{-}N}$ un plano perpendicular a éste; dicho plano cortará a las caras $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ según rectas perpendiculares a $\widehat{M\text{-}N}$, las cuales pasarán a su vez por los centros $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ de los polígonos regulares $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ respectivamente.

Tracemos a continuación por $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ rectas perpendiculares a las caras $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$, que

estarán contenidas en el plano perpendicular a ambas $\widehat{APB}$, y que se cortarán en dicho plano en el punto $\widehat{O}$, ya que las dos caras $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ forman entre sí un determinado ángulo diedro.

El punto $\widehat{O}$, equidistará de $\widehat{M}$ y $\widehat{N}$, así como de los restantes vértices de los dos polígonos $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ que, supuestos unidos al centro $\widehat{O}$, formarán dos pirámides rectas regulares de bases $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$, y de alturas respectivas $\widehat{AO}$ y $\widehat{BO}$; por consiguiente, los puntos $\widehat{D}$ y $\widehat{E}$ extremos de las aristas $\widehat{MD}$ y $\widehat{ME}$ correspondientes éstas a la tercera cara $\widehat{C_c}$ (no triangular) del triedro, también equidistarán de $\widehat{O}$. Ahora bien, el plano de la cara $\widehat{C_c}$ está determinado por los tres puntos no alineados $\widehat{D}$, $\widehat{M}$ y $\widehat{E}$ ($\widehat{D}$ y $\widehat{E}$ están en $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ respectivamente) y siendo un polígono regular mayor de tres lados, su centro $\widehat{F}$ equidistará de los restantes vértices; si por el centro $\widehat{F}$ de $\widehat{C_c}$ trazamos la perpendicular al plano de $\widehat{C_c}$ todos los puntos de ésta equidistarán de los vértices de $\widehat{C_c}$ y por consiguiente pasará por el punto $\widehat{O}$ que ya hemos demostrado equidista de tres de ellos (los $\widehat{D}$, $\widehat{M}$ y $\widehat{E}$).

Repitiendo este razonamiento para otra nueva cara contigua se demuestra la equidistancia de $\widehat{O}$ para los nuevos vértices, y así sucesivamente hasta agotar todas las caras del arquimediano, lo que demuestra la propiedad enunciada.

5.22 Pasemos ahora a demostrar la propiedad en los polie-

dros arquimedianos cuyos ángulos sólidos son tetraedros.

Éste grupo lo forman los arquimedianos III al VI y los infinitos de la serie A.

Observemos previamente que en todos ellos existen, al menos, dos caras iguales, y que en la ordenación de sus caras alrededor de sus vértices respectivos están siempre alternadas dos caras iguales, pues ya vimos en el estudio de los poliedros III, IV y V (casos 4, 12 y 16 del parrafo 3.12) que no existe arquimediano de estos tipos con una ordenación consecutiva de sus caras iguales, pero sí cuando están alternadas.

Consideremos (fig. 23) las cuatro caras que forman un ángulo sólido del poliedro, en el que, al menos, dos de ellas son iguales. Sean $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ dos caras desiguales de arista común MN y supongamos que la cara tercera, opuesta a la C_b es la igual a ésta; la cuarta $\widehat{C_c}$ podrá ser igual o no a la opuesta $\widehat{C_a}$.

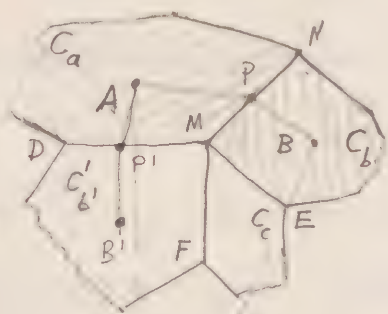


Figura 23

Tracemos por el punto $\overline{P}$, medio del segmento $\overline{MN}$ un plano perpendicular a éste; dicho plano cortará a las caras C_a y C_b según rectas perpendiculares a $\overline{M\text{-}N}$ las cuales pasarán a su vez por los centros $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ de los polígonos regulares que forman dichas caras.

Tracemos a continuación por $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ rectas perpendiculares a las caras $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$, que estarán contenidas en el plano perpendicular a ambas $\widehat{APB}$, y que se cortarán en dicho plano en el punto $\widehat{O}$, ya que las dos caras $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ forman entre sí un determinado ángulo diedro.

El punto $\widehat{O}$ equidistará de $\widehat{M}$ y $\widehat{N}$, así como de los restantes vértices de los dos polígonos $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ que, supuestos unidos al centro $\widehat{O}$, formarán dos pirámides rectas regulares de bases $\widehat{C_a}$ y $\widehat{C_b}$ y alturas respectivas $\widehat{AO}$ y $\widehat{BO}$; por consiguiente, los vértices $\widehat{D}$ y $\widehat{E}$, extremos de las aristas contiguas a las restantes caras $\widehat{C_b'}$ y $\widehat{C_c}$ del ángulo sólido $\widehat{M}$, equidistan de $\widehat{O}$.

Ahora bien, en cada lado del polígono regular $\widehat{C_a}$, existirá una cara contigua a $\widehat{C_a}$ de arista común igual a dicho lado, siendo dichas nuevas caras iguales a las $\widehat{C_b}$, y formando con ella el mismo ángulo diedro $\widehat{APB}$ que tienen las dos caras iniciales. Por consiguiente, las perpendiculares trazadas al plano de dichas caras por sus centros respectivos pasarán también todas ellas por el punto $\widehat{O}$, por lo que este punto equidistará a su vez de todos los restantes vértices de los nuevos polígonos considerados.

Con esto se llega a la conclusión de que la cara $\widehat{C_c}$ que tiene tres puntos de ella $\widehat{M}$, $\widehat{E}$, $\widehat{F}$ equidistantes de $\widehat{O}$, tendrá también equidistantes sus restantes vértices, así como los correspondientes a los nuevos vértices del po-

lígono $\widehat{C_a}$.

Repitiendo este razonamiento tomando sucesivamente una cara $\widehat{C'_{b'}}$ igual a la $\widehat{C_b}$, cuyos vértices se ha demostrado anteriormente equidistan ya de $\widehat{O}$, contigua a otra $\widehat{C'_{a'}}$ igual a la $\widehat{C_a}$ y con el mismo ángulo diedro, se deduce a su vez la equidistancia de $\widehat{O}$ de los nuevos vértices del polígono $\widehat{C'_{a'}}$, y así sucesivamente hasta agotar todas las caras del tipo $\widehat{C_a}$ del poliedro, lo que demuestra la propiedad enunciada.

<u>5.23</u> Finalmente, queda por demostrar la propiedad en los arquimedianos cuyos ángulos sólidos son pentaedros.

Este grupo lo forman exclusivamente los arquimedianos I y II formados por cuatro caras triangulares (iguales) y una quinta cuadrada o pentagonal respectivamente.

Tomando como base la cara desigual de 4 ó 5 lados (fig. 24) de vértices $\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3} \ldots$; considerando las caras triangulares adyacentes $\widehat{1 \cdot 6 \cdot 2}$, $\widehat{2 \cdot 9 \cdot 3}$, $\widehat{3 \cdot 8 \cdot 4} \ldots$ que forman ángulos diedros iguales con la cara base $\widehat{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots}$ y siguiendo el mismo razonamiento del grupo anterior de

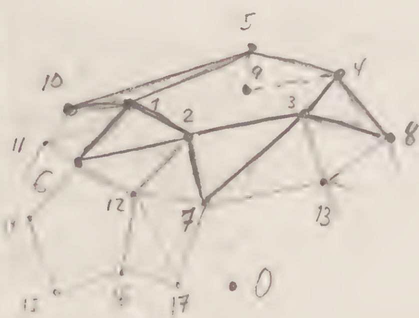
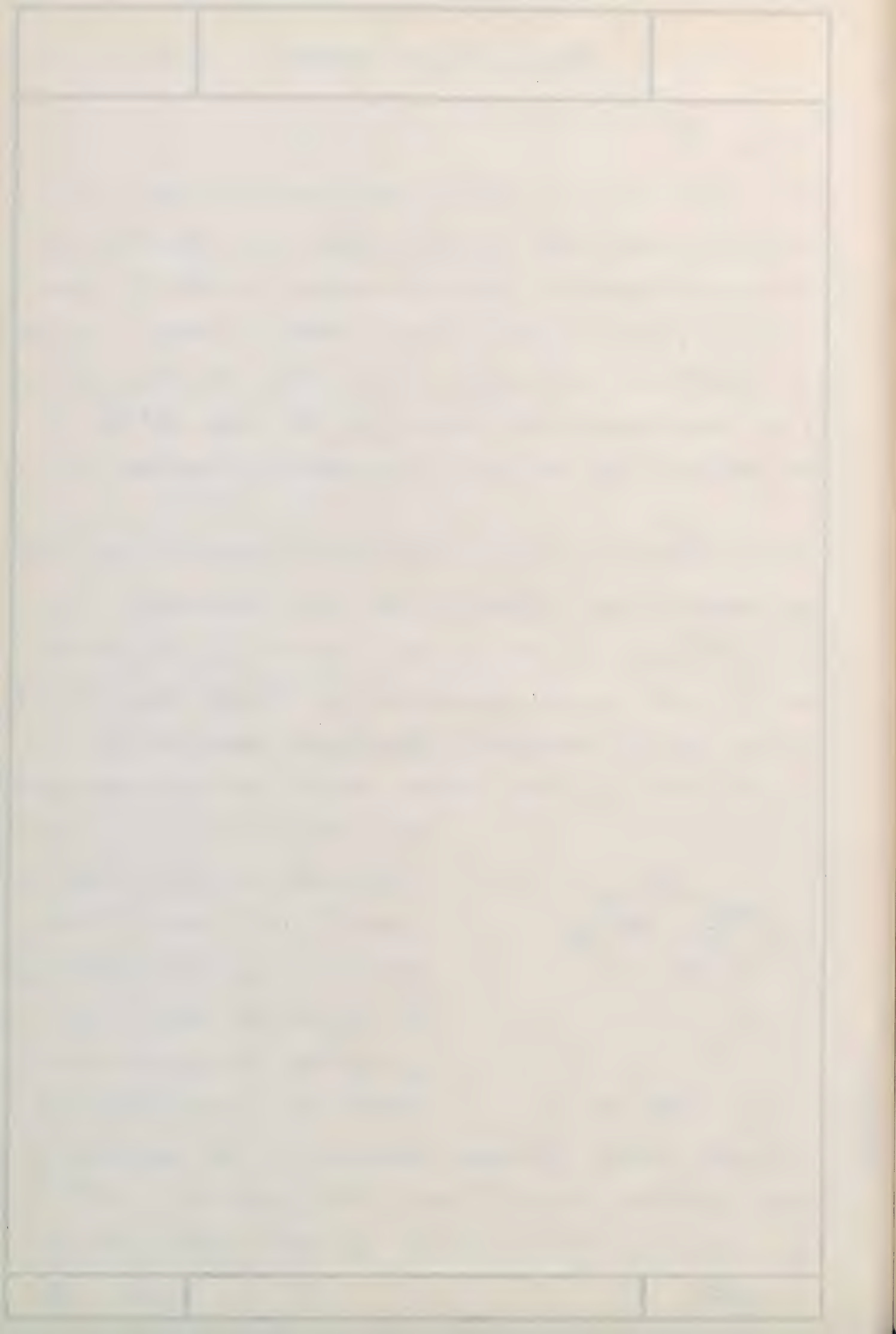


Figura 24

ángulos sólidos tetraedros, llegaríamos a la conclusión de que los vértices $\widehat{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots}$ del primer polígono y los $\widehat{6}, \widehat{7}, \widehat{8}, \ldots$ de sus caras adyacentes, equidistan todos de un mismo



punto $\overline{O}$ del espacio interior del poliedro, pero no se demostró la equidistancia de $\overline{O}$ de los restantes vértices $\overline{11}$, $\overline{12}$, $\overline{13}$ ... que se obtienen al completar con todas sus caras los ángulos sólidos de vértices $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, ... de la cara inicial.

Teniendo en cuenta la colocación de las cinco caras en cada ángulo sólido del poliedro $(P_3 - P_3 - \overline{P_{5(ó 4)} - P_3} - P_3)$, podemos deducir la simetría del mismo con respecto a un plano que pase por la arista que deje en semiespacios distintos a dos caras triangulares; en la figura 12, la arista $\overline{2-12}$ perteneciente p. e. al vértice $\overline{2}$ y el centro $\overline{O}$ obtenido anteriormente, determinan un plano que es plano de simetría del ángulo sólido en $\overline{2}$ ya que divide al espacio en dos semiespacios, en uno de los cuales se encuentran las caras triangulares $\overline{1\cdot6\cdot2}$, $\overline{2\cdot6\cdot12}$, y en el opuesto las $\overline{2\cdot12\cdot7}$, $\overline{2\cdot7\cdot3}$. Por la misma razón, la arista $12\cdot7$ pertenece al plano de simetría del ángulo sólido $\overline{12}$ de la cara contigua pentagonal (o cuadrada) $\overline{6\cdot14\cdot15-16\cdot12}$. Así pues, se deduce de esta simetría que los diedros formados en las aristas $\overline{2-6}$ y $\overline{2-7}$ por las dos caras triangulares $\overline{1\cdot6\cdot2}$, $\overline{2\cdot6\cdot12}$, y $\overline{2\cdot12\cdot7}$, $\overline{2\cdot7\cdot3}$ respectivamente, son iguales entre sí, por simetría con respecto al plano $\overline{2\cdot12\cdot0}$; igualmente son iguales los diedros formados en las aristas $\overline{2\cdot12}$ y $\overline{12\cdot17}$ por las dos caras triangulares $\overline{2\cdot6\cdot12}$, $\overline{2\cdot12\cdot7}$ y $\overline{13\cdot7\cdot17}$, $\overline{12\cdot17\cdot16}$ son también iguales entre sí, por simetría con respecto al plano $\overline{12\cdot7\cdot0}$, e iguales a los anteriores

POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Hojas 91 al 100

(todos los ángulos sólidos son iguales). Con esto llegamos a la conclusión de que los diedros formados entre sí por las cuatro caras triangulares del ángulo sólido $\widehat{2}$, son todos iguales.

De la igualdad de estos diedros se deduce que la pirámide formada por las cuatro caras triangulares alrededor del vértice $\widehat{2}$, tiene su base $\widehat{1 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 3}$ plana, y los vértices de ésta en una circunferencia (las aristas laterales de dicha pirámide son todas iguales).

Como ya hemos demostrado al principio que los vértices $\widehat{1, 6, 7, 3}$ equidistan de $\widehat{O}$ y el $\widehat{12}$ es concíclico con aquéllos, se deduce que el vértice $\widehat{12}$ también equidista de $\widehat{O}$, así como los restantes que forman la zona del casquete compuesto por una cara desigual del poliedro y todas las triangulares que completan los ángulos sólidos de los vértices de dicha cara.

Al ser válida esta conclusión para una cara desigual cualquiera, lo será para todas las restantes que se obtengan al ir completando el poliedro, con lo cual queda demostrada la propiedad enunciada.

<u>5.3 En todo poliedro arquimediano existe una esfera que es tangente en su punto medio a todas sus aristas, y cuyo centro coincide con el de la esfera circunscrita.</u>

Según se deduce de las propiedades 5.1 y 5.2, cualquier

arista y el centro O de la esfera circunscrita determinan un plano que corta a la esfera según un círculo máximo de la misma y que pasa por los extremos de dicha arista; ésta será pues la cuerda de una circunferencia de radio constante cuyo punto medio equidista siempre de su centro. (punto de contacto de la circunferencia de centro O, tangente a la arista).

<u>5.4 En todo poliedro arquimediano existe una esfera que es tangente en su centro a todas las caras de igual tipo; el centro de dicha esfera coincide con el de la circunscrita.</u>

En efecto, la superficie de un poliedro arquimediano está limitada parcialmente por polígonos regulares iguales, cuyos vértices son vértices de ángulos sólidos situados en la esfera circunscrita (5.1). Al unir los vértices de cada polígono con el centro O de dicha esfera se nos formarán pirámides rectas regulares iguales para cada tipo de polígono, y por lo tanto: de altura constante. Esta altura será pues el radio de una esfera tangente a la cara correspondiente en el centro de la misma.

Por consiguiente habrá una esfera tangente por cada tipo de caras que concurran en un vértice cualquiera y, según hemos visto anteriormente (ver párrafo 2.2, 4ª condición) sólo son posibles como máximo tres diferentes

y como mínimo dos.

De lo expuesto se deduce que "en todo poliedro arquimediano existen como mínimo dos, y como máximo tres esferas tangentes a sus caras iguales". El centro de dichas esferas es coincidente con el de la circunscrita.

5.5 En todo poliedro arquimediano, el polígono convexo que se obtiene al unir ordenadamente los extremos de las aristas que concurren en cualquier vértice, es plano y está inscrito en una circunferencia

Como las aristas de un arquimediano son todas iguales, (5.1) y sus extremos están situados en una esfera única (5.2) circunscrita al poliedro, si con una abertura de compás igual a la arista y centro en un vértice cualquiera, trazamos en la esfera circunscrita una circunferencia, ésta pasará por los extremos de las aristas que concurran en dicho vértice (son todas iguales); si unimos en esta circunferencia los extremos de las aristas correspondientes en forma sucesiva, se nos formará un polígono convexo de tantos lados como caras tiene el mencionado ángulo sólido, que será plano (sus vértices pertenecen a una circunferencia), convexo (se unen los puntos sucesivamente en la circunferencia), e inscrito en la misma.

5.6 Resumen de las propiedades geométricas de los poliedros arquimedianos

Como resumen de lo expuesto anteriormente, damos seguidamente las principales propiedades geométricas de todo poliedro arquimediano, ya demostradas.

En todo poliedro arquimediano se verifica que:

5.1 Todas sus aristas son iguales.

5.2 Existe una esfera circunscrita al poliedro, que contiene todos sus vértices.

5.3 Existe una esfera tangente a las aristas en su punto medio, concéntrica con la circunscrita.

5.4 Existe, para cada tipo de cara, una esfera tangente a ellas en su centro, concéntrica con la circunscrita. El número de esferas será de dos o tres, según el caso

5.5 El polígono convexo que se obtiene al unir consecutivamente los extremos de las aristas que concurren en cualquier vértice, es plano e inscribible en una circunferencia. Dicho polígono sólo podrá tener tres, cuatro o cinco lados, y al menos, uno desigual, según el caso.

6. Propiedades métricas de los poliedros arquimedianos

En el estudio que realizamos a continuación vamos a deducir fórmulas generales que nos sirvan para la determinación de los principales elementos comunes a todos los arquimedianos, para su posterior aplicación a cada tipo particular.

Todas las fórmulas obtenidas lo serán en función del lado $\underline{l}$ del arquimediano, y para ello utilizaremos preferentemente las propiedades métricas que se estudian en la Geometría racional. Sólo excepcionalmente, y cuando esto no sea posible, acudiremos al cálculo trigonométrico, a las ecuaciones de la Geometría analítica, e incluso al cálculo logarítmico que facilita las soluciones numéricas de estos últimos cálculos.

Simultáneamente haremos uso, para la representación del poliedro, de dibujos en el sistema diédrico, acotados convenientemente en sus proyecciones siguiendo las reglas correspondientes empleadas en el dibujo técnico, de gran precisión y claridad.

En la parte deductiva y como aclaración a ella, utilizaremos por el contrario figuras representadas axonométricamente que permiten seguir con más facilidad el razonamiento geométrico.

6.1 Deducción de fórmulas generales a aplicar en el

Cálculo de magnitudes fundamentales comunes a todo poliedro arquimediano.

Consideraremos como dato único y básico, para el cálculo general de magnitudes lineales en un poliedro arquimediano, la longitud l de la arista del mismo.

Las fórmulas generales que deduciremos a continuación, se refieren a las siguientes magnitudes:

1) Radio a de la esfera circunscrita
2) Radio b de la esfera tangente a las aristas
3) Radio c_n de la esfera inscrita (el subíndice n se referirá al número de lados que tenga el polígono de la cara a la cual es tangente la esfera; en cada arquimediano, n sólo podrá tener dos o tres valores distintos).
4) Angulo φ_{pq} del diedro formado por dos caras contiguas (los subíndices p y q se refieren a los números de lados que tengan respectivamente los polígonos de ambas caras).
5) Radio d_n de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara (el subíndice n de igual significado que en 3).
6) Radio m de la circunferencia circunscrita al polígono convexo no regular obtenido al unir

los extremos de las aristas concurrentes en un vértice

Para el cálculo de estos elementos consideremos un ángulo sólido de cualquier arquimediano, en cuyo vértice concurren tantas aristas como caras lo formen, siendo éstas polígonos regulares de dos o tres tipos diferentes.

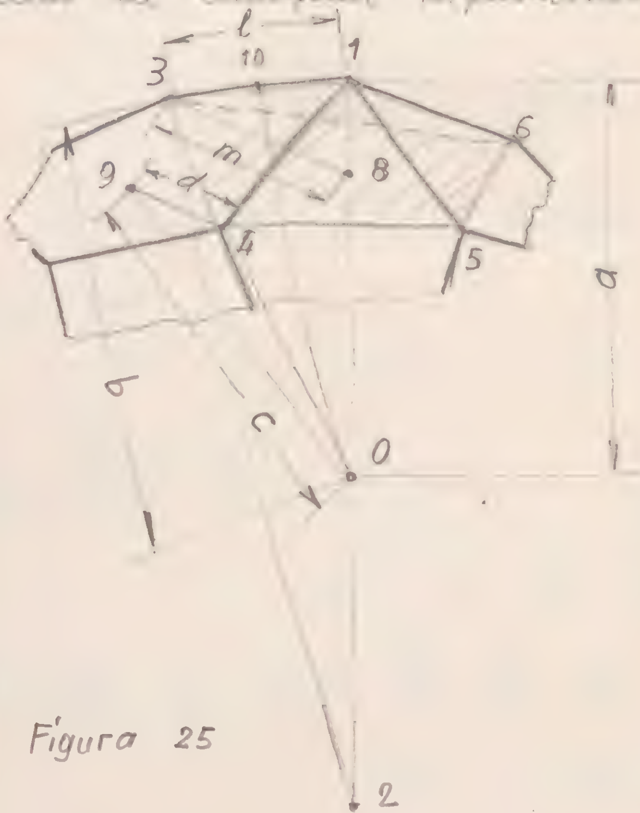


Figura 25

Sea (fig. 25) $\hat{1}$ el vértice de dicho ángulo sólido, y $\overline{3.4,\ldots 6}$ los vértices contiguos que formarán un polígono convexo, no regular, inscrito en una circunferencia (ver párrafo 5.5) y de tantos lados como sean las caras concurrentes (tres, cuatro o cinco). La pirámide $\overline{1-3\cdot4\cdot5\ldots}$ será recta (ver párrafo 5.5) y su altura $\overline{1\cdot8}$ pasará por el centro $\overline{0}$ de la esfera circunscrita (el punto $\hat{8}$ a su vez es el centro de la circunferencia circunscrita a la base).

Consideremos también el punto $\hat{9}$, centro de una cara, y el $\widehat{10}$, centro de una arista.

En la figura se acotan los segmentos siguientes: $\overline{(0\cdot1)}=a$; $\overline{(0\cdot10)}=b$; $\overline{(0\cdot9)}=c$; $\overline{(4\cdot9)}=d$; $\overline{(3\cdot8)}=m$ y $\overline{(3\cdot1)}=l$.

Si $\hat{2}$, punto simétrico de $\hat{1}$ con respecto a $\hat{0}$, lo unimos con $\hat{3}$, el triángulo $\overline{(1\cdot2\cdot3)}$ será rectángulo en $\hat{3}$,

por ser el segmento $\overline{(1\cdot 2)}$ diámetro de la esfera circunscrita al poliedro; por otra parte se verifica que $(1\cdot 8)$ es la proyección de $\overline{(3\cdot 1)}$ sobre $(1\cdot 2)$. Por consiguiente tendremos que

$$(3\cdot 1)^2 = (1\cdot 2) \times (1\cdot 8)$$

El triángulo $\overline{(3\cdot 8\cdot 1)}$ también es rectángulo en 8, verificándose que

$$(1\cdot 8)^2 = (3\cdot 1)^2 - (3\cdot 8)^2$$

que sustituido en la primera, nos da

$$(3\cdot 1)^2 = (1\cdot 2) \times \sqrt{(3\cdot 1)^2 - (3\cdot 8)^2}$$

teniendo en cuenta las cotas de la figura, tendremos

$$l^2 = 2a\sqrt{l^2 - m^2}$$

y despejando $\widehat{a}$

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} \qquad [1]$$

fórmula que nos permite calcular el radio $\widehat{a}$ de la esfera circunscrita a cualquier arquimediano, en función de su lado $\widehat{l}$, calculando previamente $\widehat{m}$ para cada caso particular, siendo $\widehat{m}$ el radio de la circunferencia circunscrita al polígono convexo no regular obtenido al unir los extremos de las aristas concurrentes en un vértice.

Si unimos el centro $\widehat{q}$ de una cara con uno de sus

vértice $\overline{4}$ (fig. 95), y éste con $\overline{0}$, el triángulo $(4 \cdot 9 \cdot 0)$ formado, será rectángulo en 9, por lo que tendremos:

$$(0 \cdot 9) = \sqrt{(0 \cdot 4)^2 - (4 \cdot 9)^2}$$

o sea

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} \qquad [2]$$

fórmula que nos permite calcular los radios $\overline{c_p}$, $\overline{c_q}$, $\overline{c_r}$ de la esfera circunscrita a las caras del arquimediano correspondientes a los polígonos regulares de $\overline{p}$, $\overline{q}$ y, en su caso, $\overline{r}$ lados, en función del radio $\overline{a}$ (fórmula [1]) de la esfera circunscrita, calculando previamente el radio $\overline{d}$ de la circunferencia circunscrita a la respectiva cara.

Si unimos (fig. 95) el centro $\overline{10}$ de una arista con $\overline{0}$, el triángulo $(1 \cdot 10 \cdot 0)$ será rectángulo en $\overline{10}$, por lo que

$$(0 \cdot 10) = \sqrt{(0 \cdot 1)^2 - (10 \cdot 1)^2}$$

o sea

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} \qquad [3]$$

fórmula que nos permite calcular el radio $\overline{b}$ de la esfera tangente a las aristas, en función del lado $\overline{l}$ y del radio $\overline{a}$ de la esfera circunscrita al arquimediano (ver fórmula [1])



Para el cálculo del diedro φ_{pq}, formado por dos caras consecutivas, operaremos como sigue: Sean (fig. 26) C_p y C_q dos caras contiguas de p y q lados respectivamente, y arista común $(1 \cdot 2)$, cuyos centros respectivos son los puntos 3, 4; unamos estos centros y el punto medio 5 de la arista $(1 \cdot 2)$ con el centro O de la esfera circunscrita.

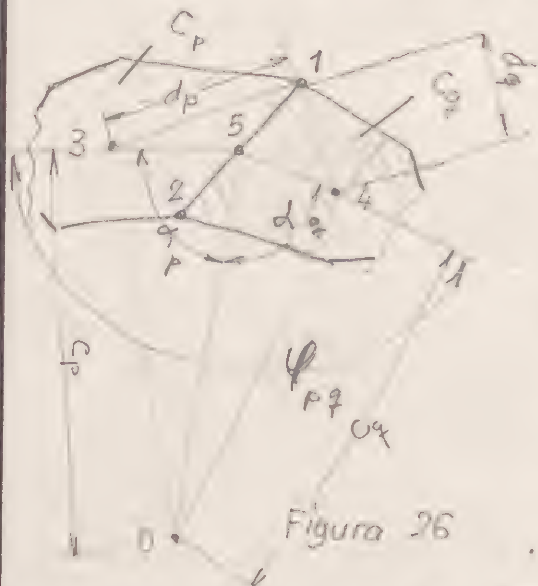


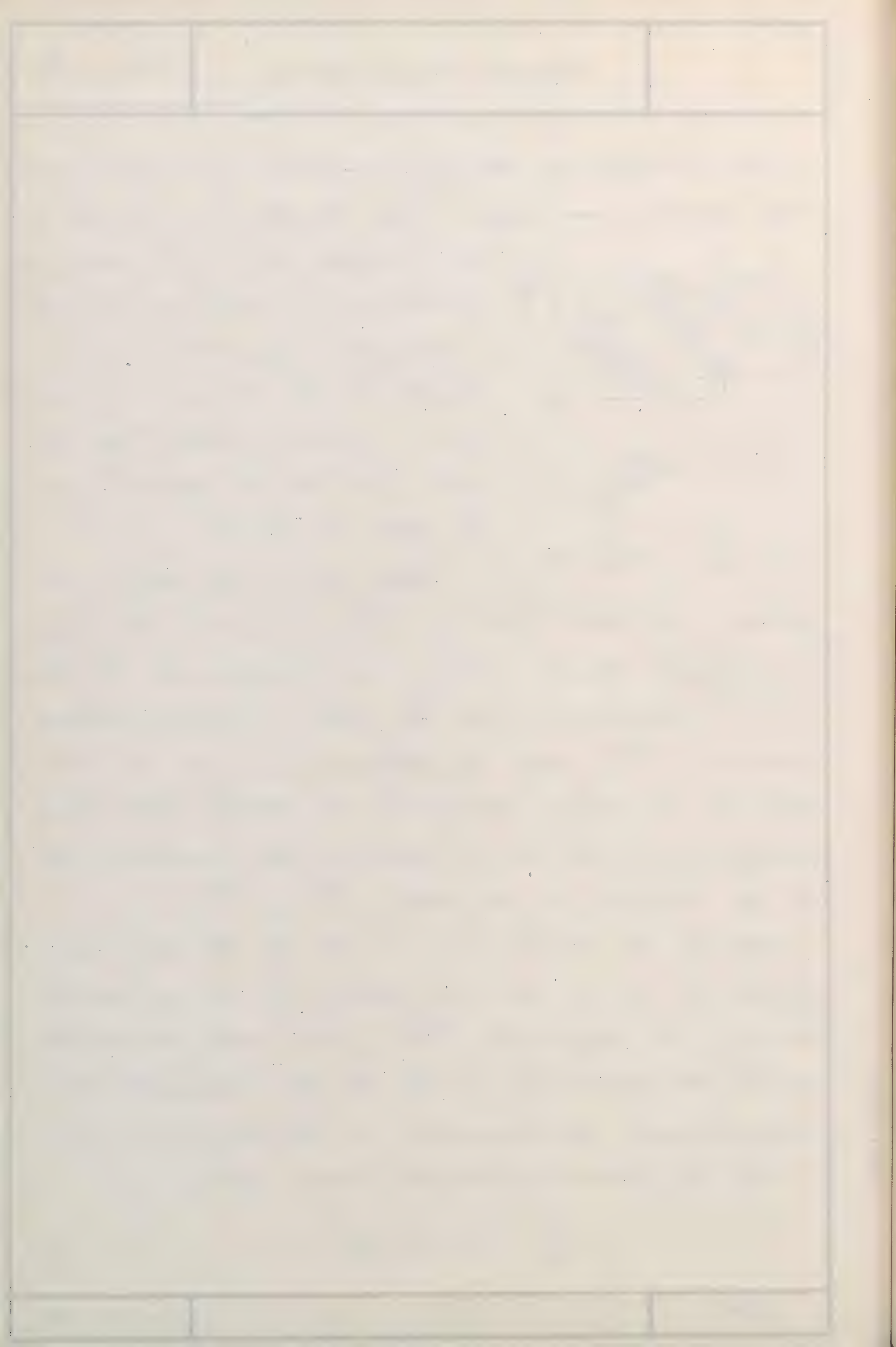
Figura 26

Siendo C_p y C_q polígonos regulares, las rectas $(3 \cdot 5)$ y $(5 \cdot 4)$ serán perpendiculares a la arista común $(1 \cdot 2)$, y por consiguiente el plano $(3 \cdot 5 \cdot 4)$ determinado por ellas será a su vez perpendicular a $(1 \cdot 2)$; como los extremos 1 y 2 de la arista están en la esfera circunscrita al poliedro, dicho plano pasará a su vez por el centro O de la misma, por lo que contendrá a las rectas $O \cdot 3$ y $O \cdot 4$.

Uniendo los centros 3 y 4 de las dos caras contiguas C_p y C_q con el extremo 1 de su arista común, los segmentos $(3 \cdot 1)$ y $(4 \cdot 1)$ serán respectivamente los radios d_p y d_q de las correspondientes circunferencias circunscritas a los polígonos C_p y C_q.

De la figura se deduce pues que

$$\varphi_{pq} = \alpha_p + \alpha_q \qquad [4]$$



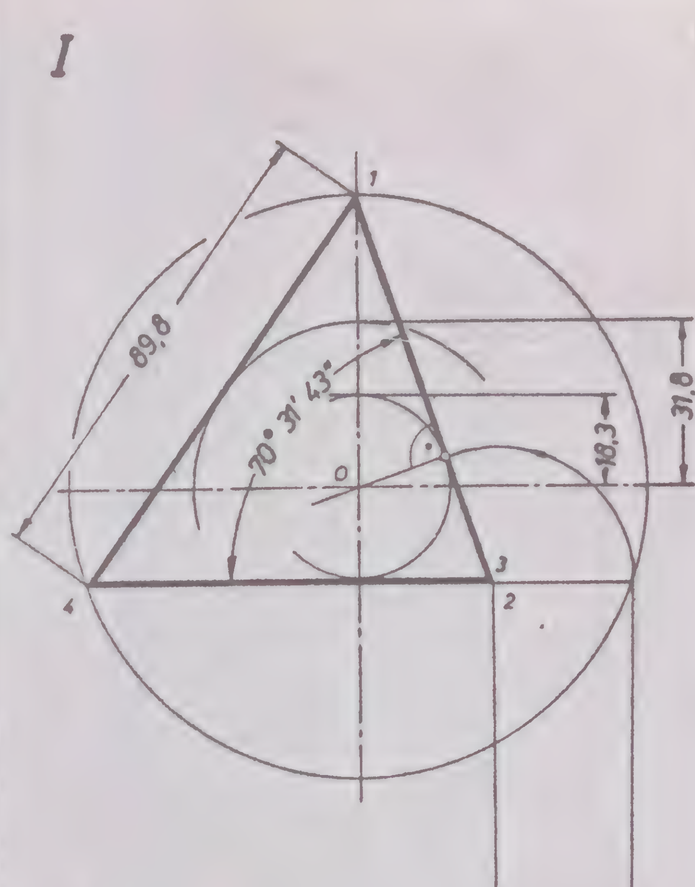
Llamando $\overline{l}$ a la arista $\overline{(1\cdot 2)}$ será

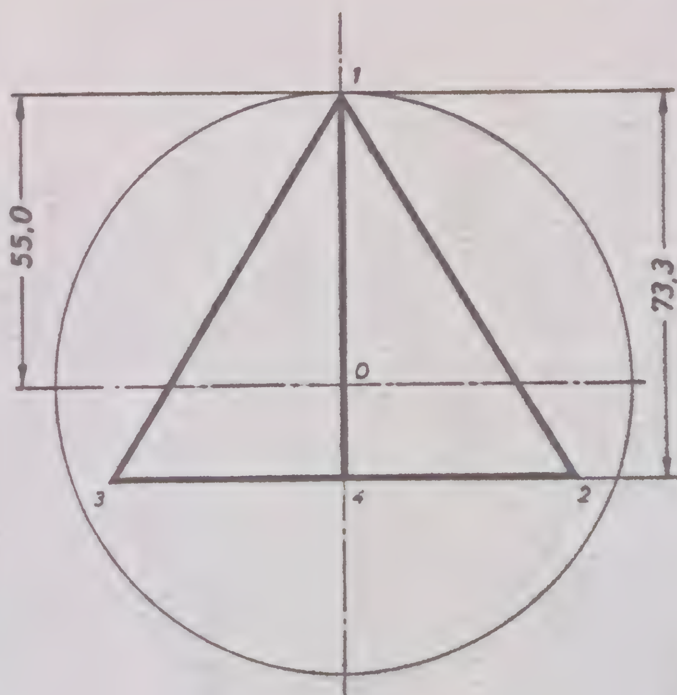
$$\overline{3\cdot 5} = \sqrt{d_p^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \quad y \quad \overline{4\cdot 5} = \sqrt{d_q^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}, \quad \text{de donde}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_p &= \frac{3\cdot 0}{3\cdot 5} = \frac{c_p}{\sqrt{(d_p)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = \frac{2\, c_p}{\sqrt{4\,(d_p)^2 - l^2}} \\ \operatorname{tg} \alpha_q &= \frac{4\cdot 0}{4\cdot 5} = \frac{c_q}{\sqrt{(d_q)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = \frac{2\, c_q}{\sqrt{4\,(d_q)^2 - l^2}} \end{aligned}\right\} \quad [5]$$

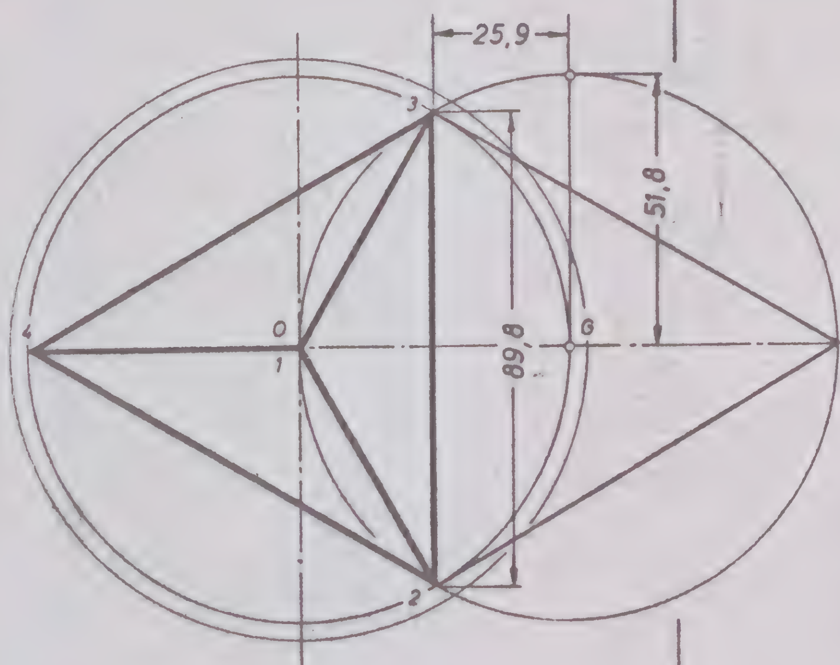
con las fórmulas [4] y [5], teniendo en cuenta el valor de $\overline{c}$ para las caras de $\overline{p}$ y $\overline{q}$ lados (ver fórmula [2]), puede calcularse el valor del ángulo rectilíneo del diedro formado por dichas caras.

LAMINAS DE LOS CINCO POLIE-
DROS REGULARES CONVEXOS Y CUA-
DRO RESUMEN DE LOS CALCULOS REA-
LIZADOS EN ESTE ESTUDIO GRÁFICO-ANA-
LÍTECO DE LOS MISMOS





+X O +Y



ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico en los planos I, II y III, un tetraedro regular de 89,8 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

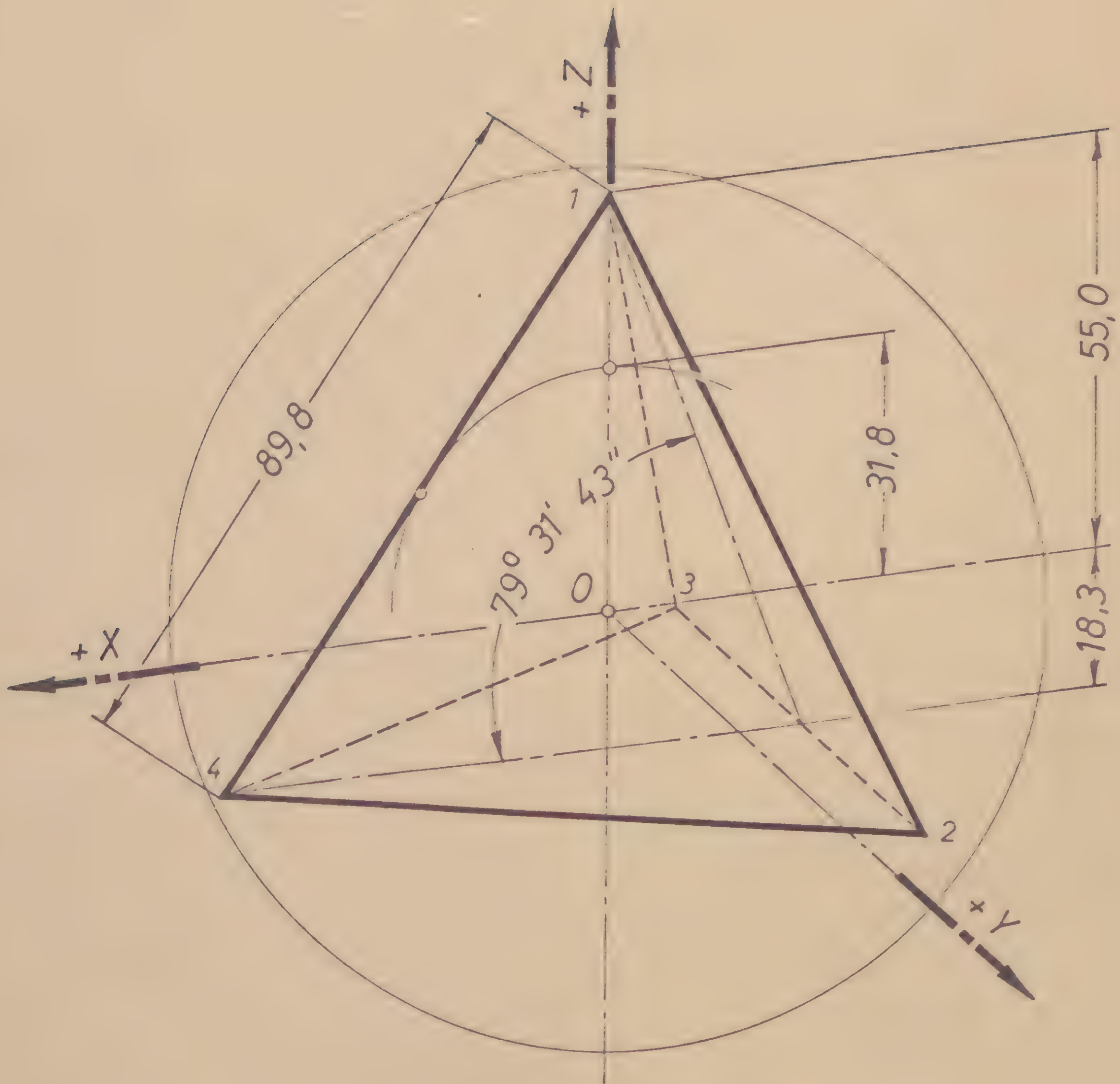
Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

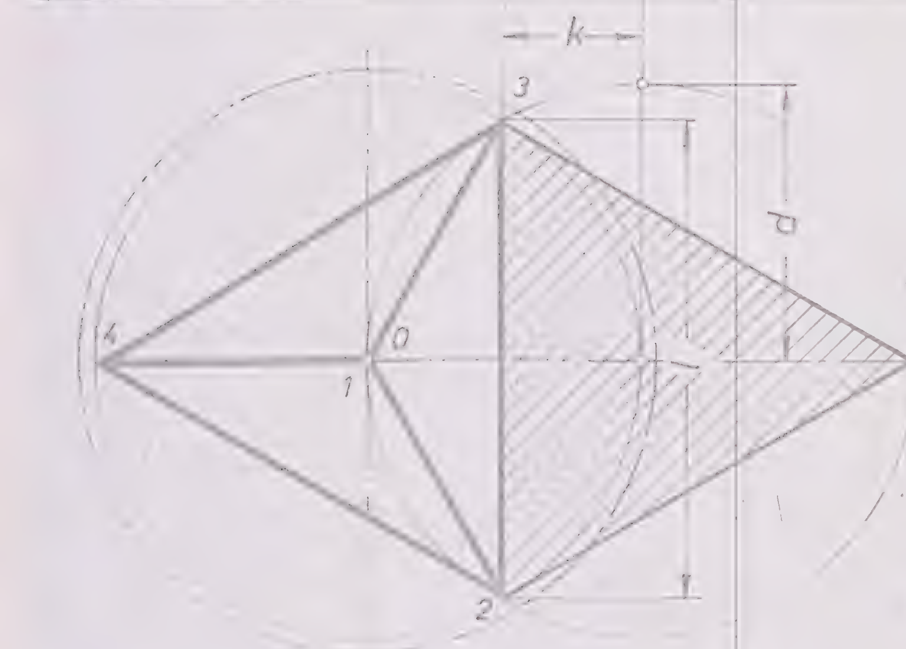
II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela
Fecha						Curso
Alumno						

Escala 1:1	Tetraedro regular convexo	Lámina 1
		Curso 19 -19



Tetraedro regular convexo



DATOS: $\begin{cases} 0\ (120,\ 120,\ 150)\ \text{mm} \\ l = 155{,}3\ \text{mm} \end{cases}$

RESULTADOS:

$a = 0{,}61\ 23\ 72 \ldots l = 95{,}1$

$b = 0{,}35\ 35\ 53 \ldots l = 54{,}9$

$c = 0{,}20\ 41\ 24 \ldots l = 31{,}7$

$d = 0{,}57\ 73\ 50 \ldots l = 89{,}7$

$2\varphi = 70°\ 31'\ 43''$

$k = 0{,}28\ 86\ 75 \ldots l = 44{,}8$

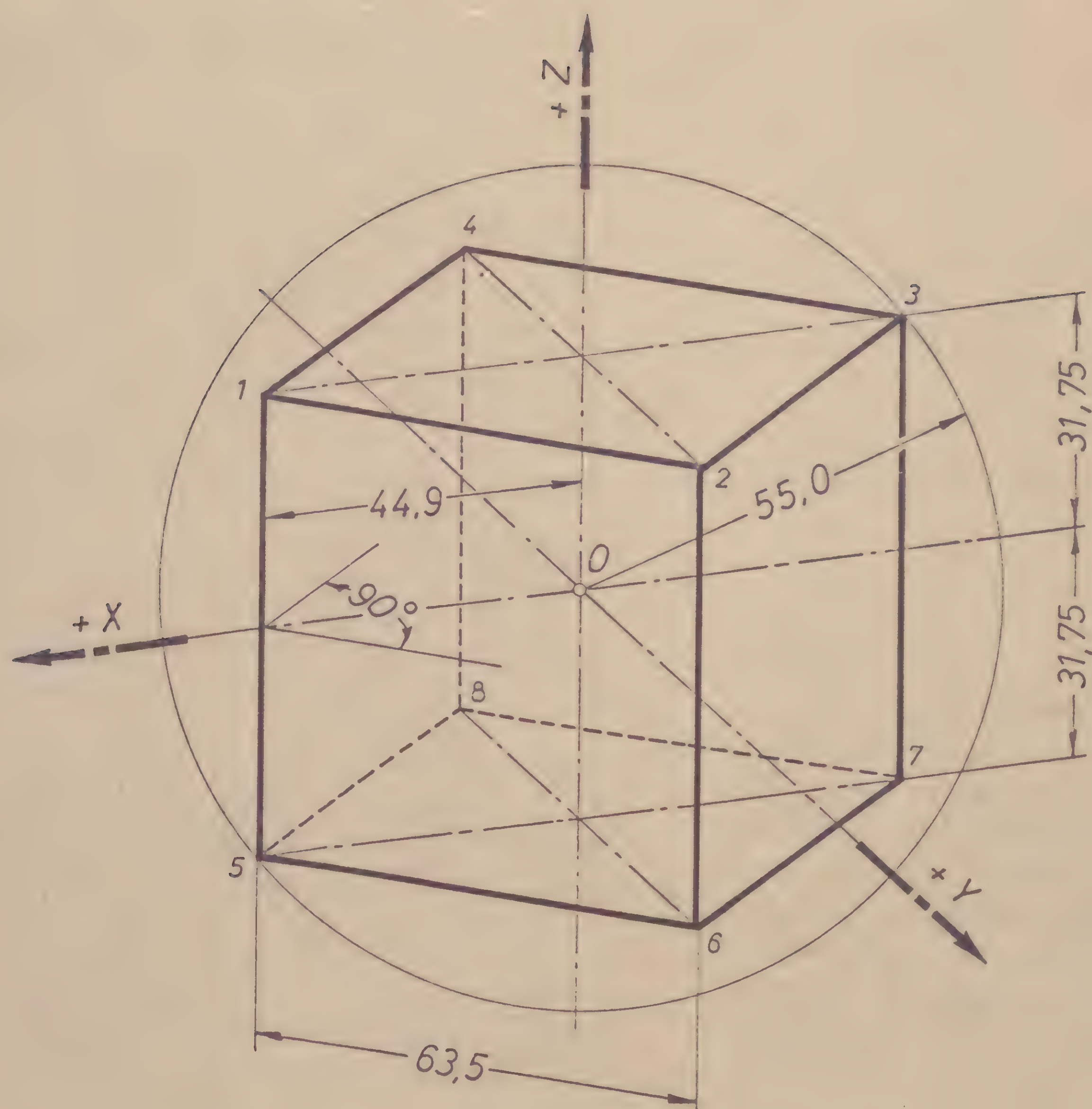
$h = 0{,}81\ 64\ 97 \ldots l = 126{,}8$

$h = a + c$ $\qquad h = \frac{4}{3}a$ $\qquad h = 4c$

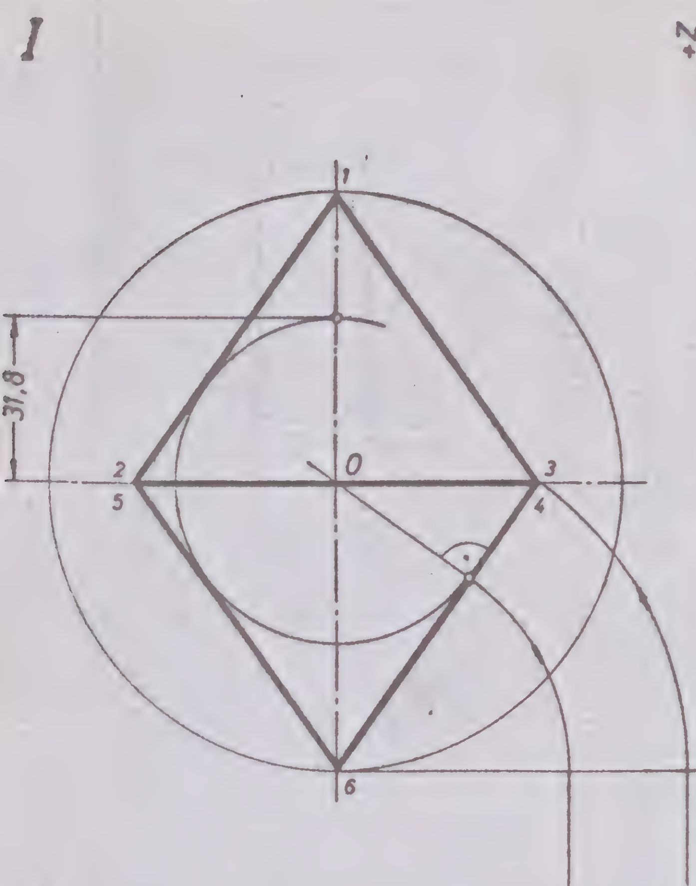
$a = 3c$ $\qquad d = 2k$

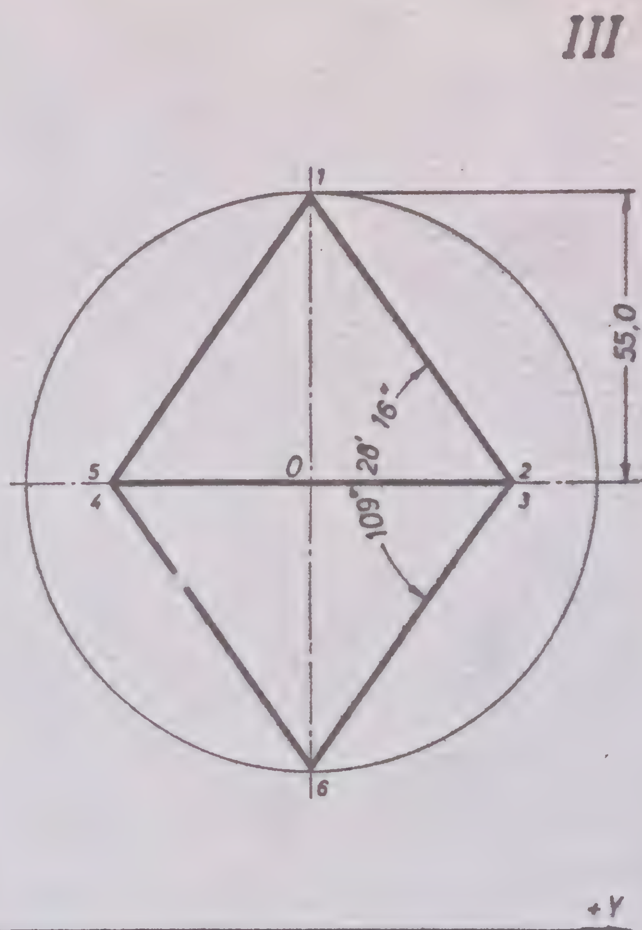
	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						

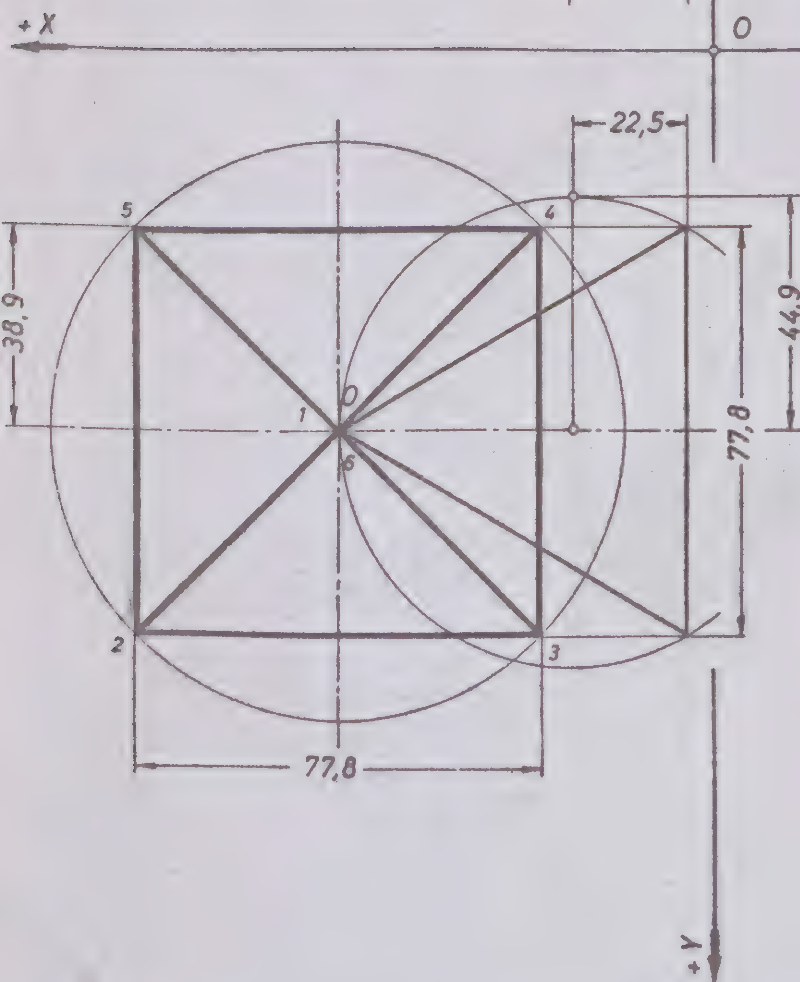
Escala		
1:2,5	Tetraedro regular convexo	Lámina
		Curso 19 -19



Exaedro regular convexo







II

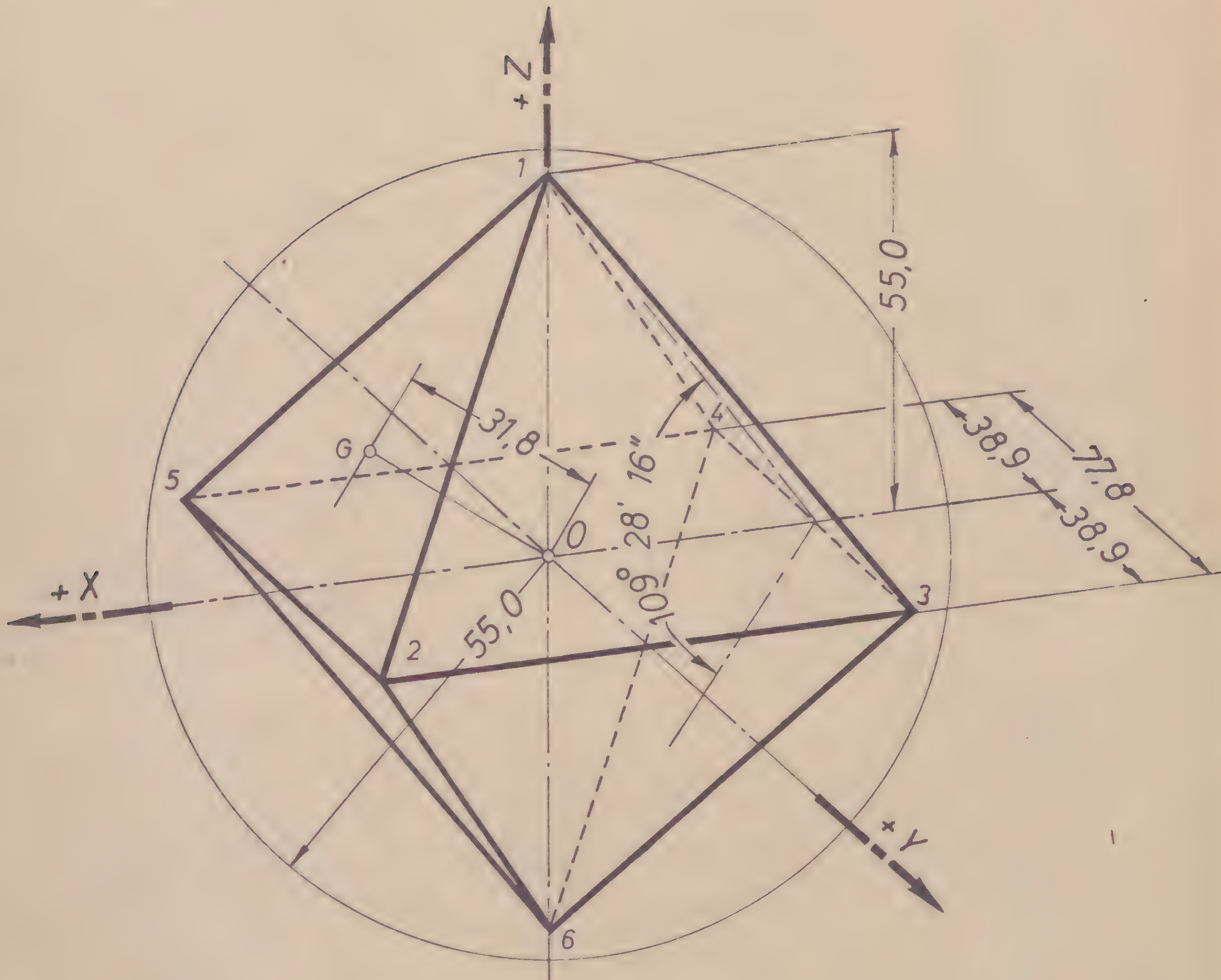
ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un octaedro regular de 77,8 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

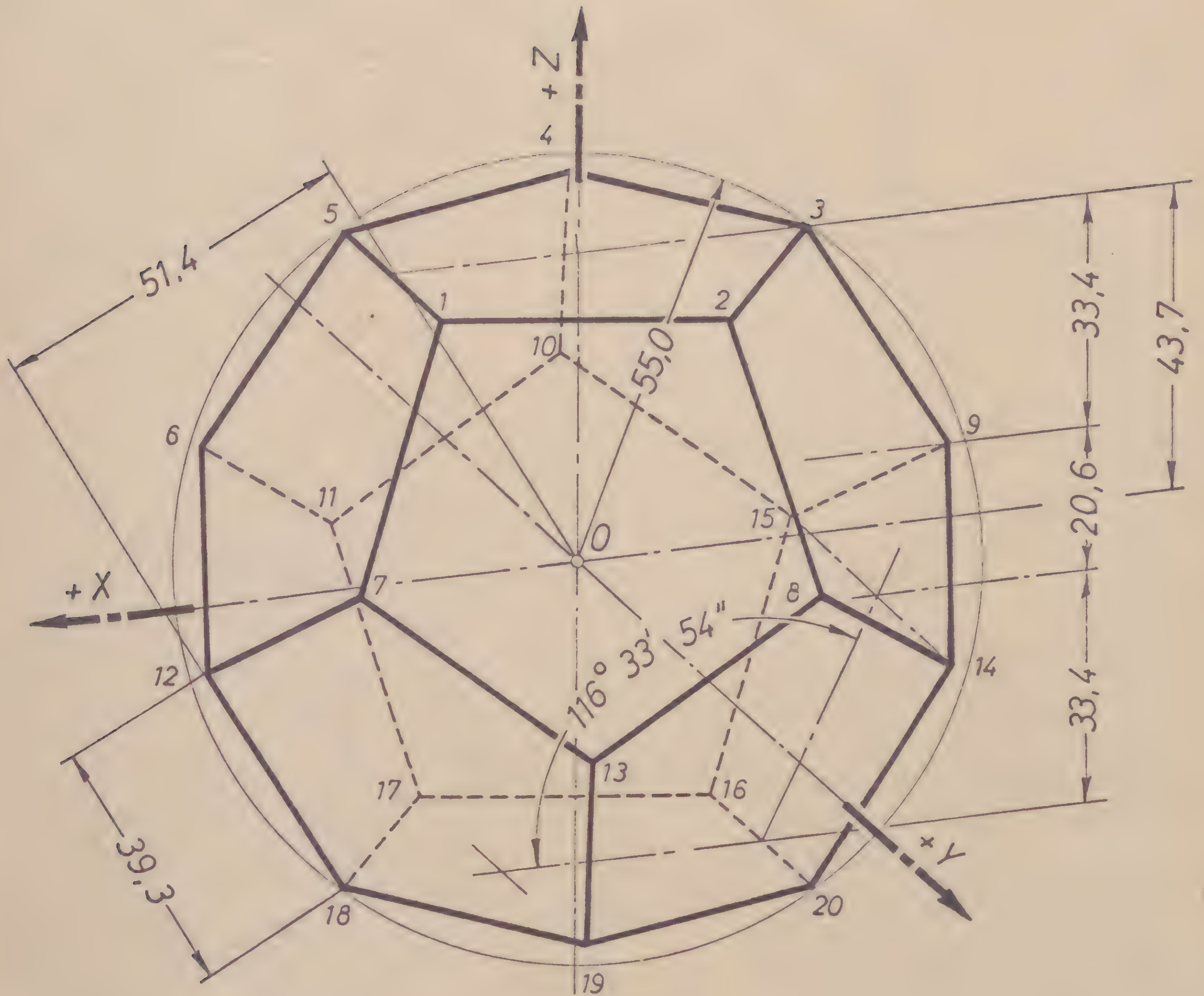
Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1

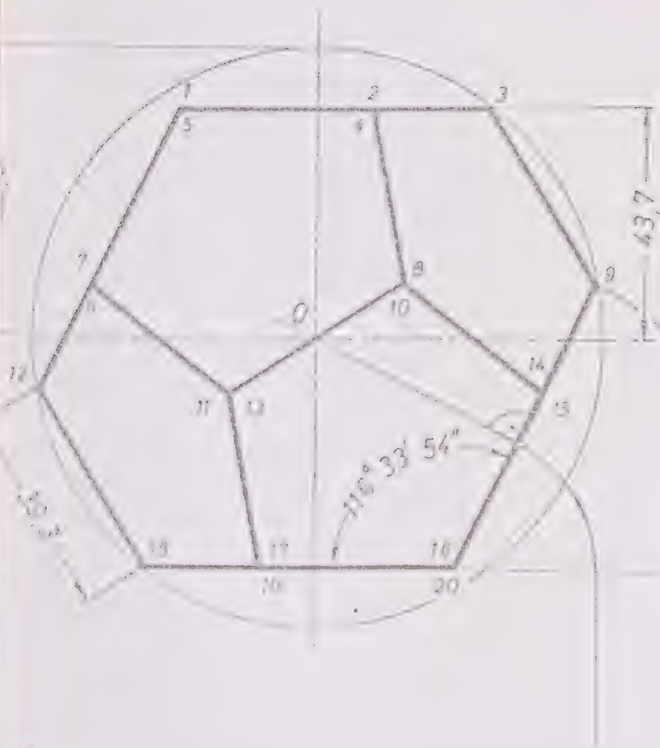
	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha						Curso
Alumno						
Escala 1:1	Octaedro regular convexo					Lámina 3 — Curso 19 -19

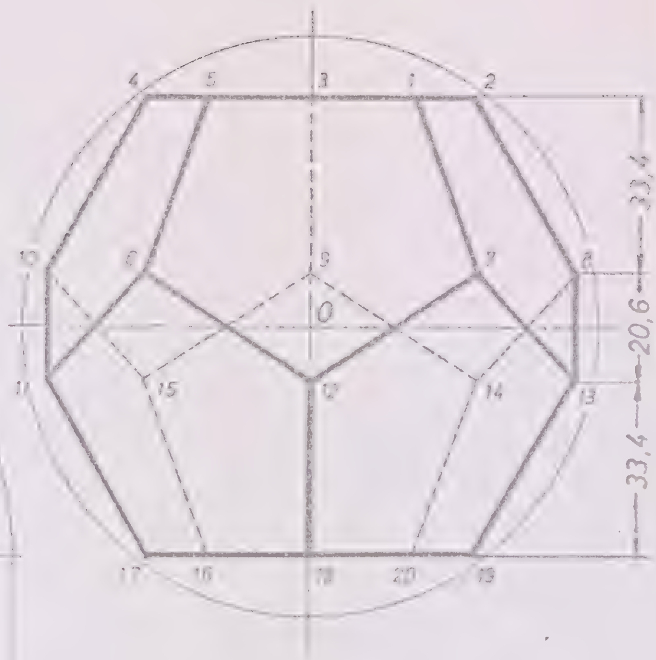


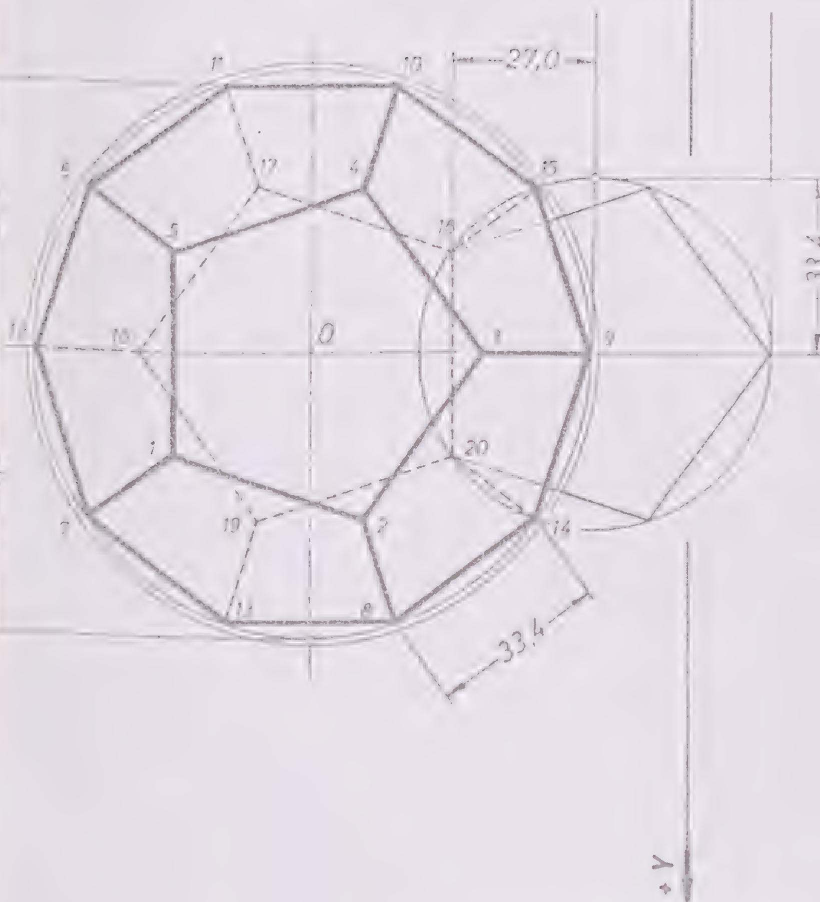
Octaedro regular convexo



Dodecaedro regular convexo







ENUNCIADO

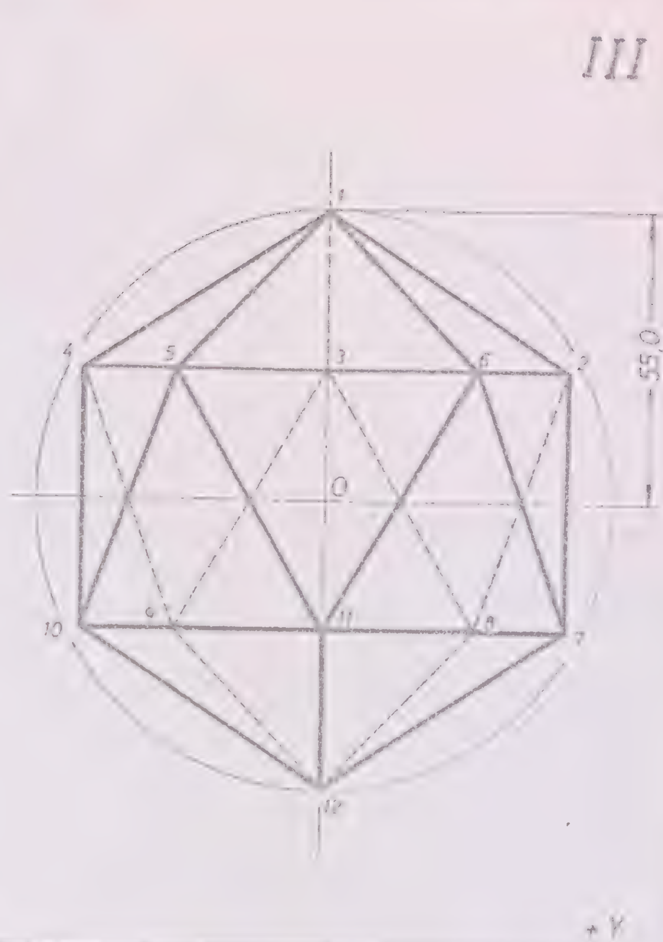
Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un dodecaedro regular de 39,3 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

II

	Propuesta	De entrega	Entregado	Calificación	(firma)	Escuela: Curso
Fecha						
Alumno						
Escala 1:1	Dodecaedro regular convexo					Lámina 4 — Curso 19 -19





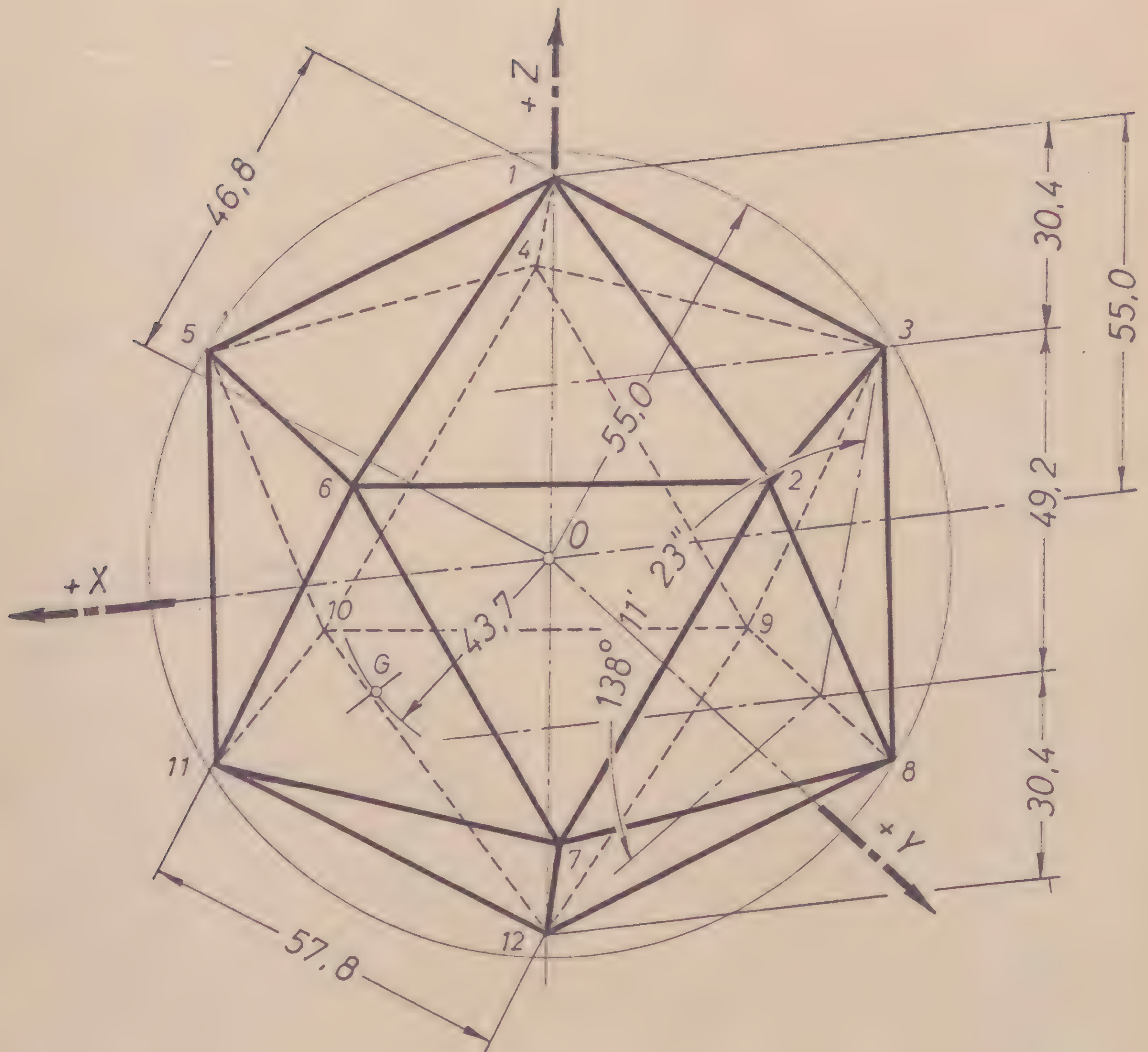
ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un icosaedro regular de 57,8 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

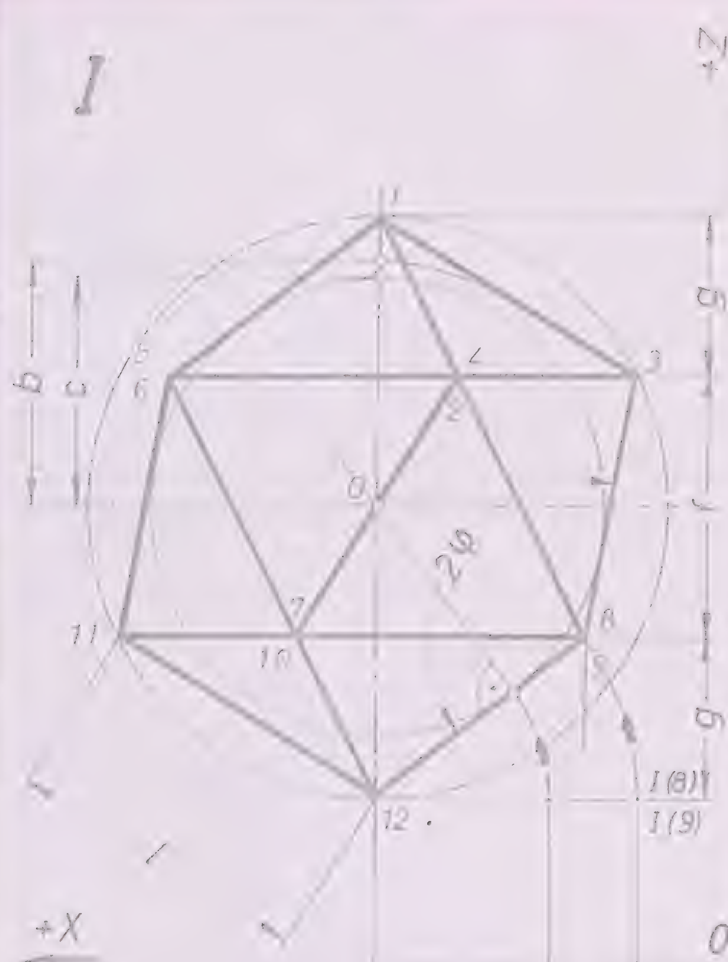
Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

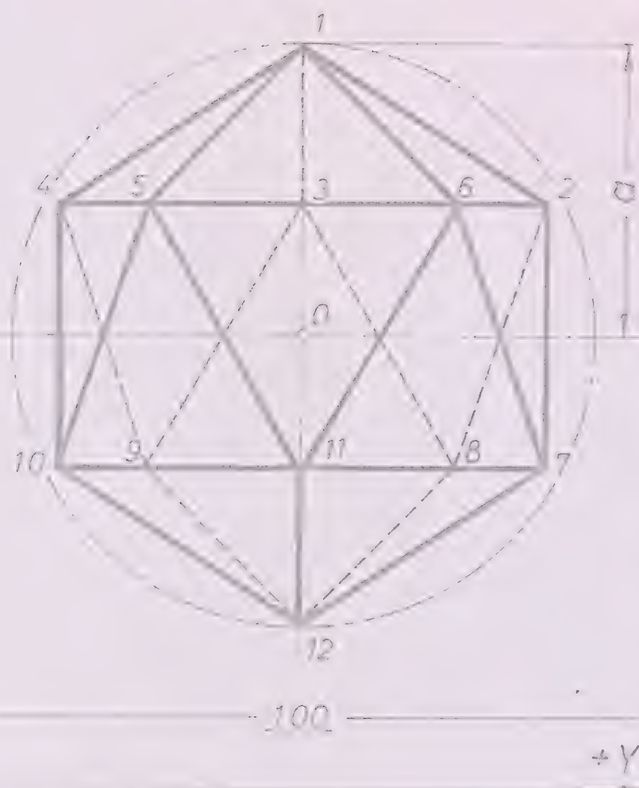
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha						Curso
Alumno						
Escala 1:1	Icosaedro regular convexo					Lámina 5
						Curso 19 - 19

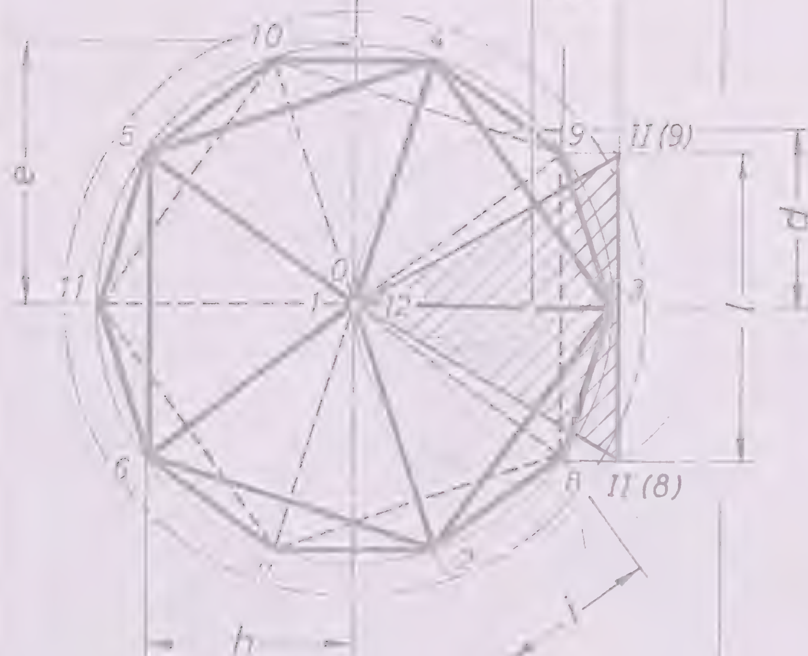


Icosaedro regular convexo





0



DATOS: $\begin{cases} 0\ (120,\ 120,\ 150)\ mm. \\ l = 100\ mm. \end{cases}$

RESULTADOS:

$a = 0{,}95\ 10\ 57 \ldots l = 95{,}1$

$b = 0{,}80\ 90\ 17 \ldots l = 80{,}9$

$c = 0{,}75\ 57\ 61 \ldots l = 75{,}6$

$d = 0{,}57\ 73\ 50 \ldots l = 57{,}7$

$e = 0{,}85\ 06\ 51 \ldots l = 85{,}1$

$2\varphi = 138^\circ\ 11'\ 23''$

$f = 0{,}85\ 06\ 51 \ldots l = 85{,}1$

$g = 0{,}52\ 57\ 31 \ldots l = 52{,}6$

$h = 0{,}68\ 81\ 91 \ldots l = 68{,}8$

$i = 0{,}52\ 57\ 31 \ldots l = 52{,}6$

$k = 0{,}28\ 86\ 75 \ldots l = 28{,}9$

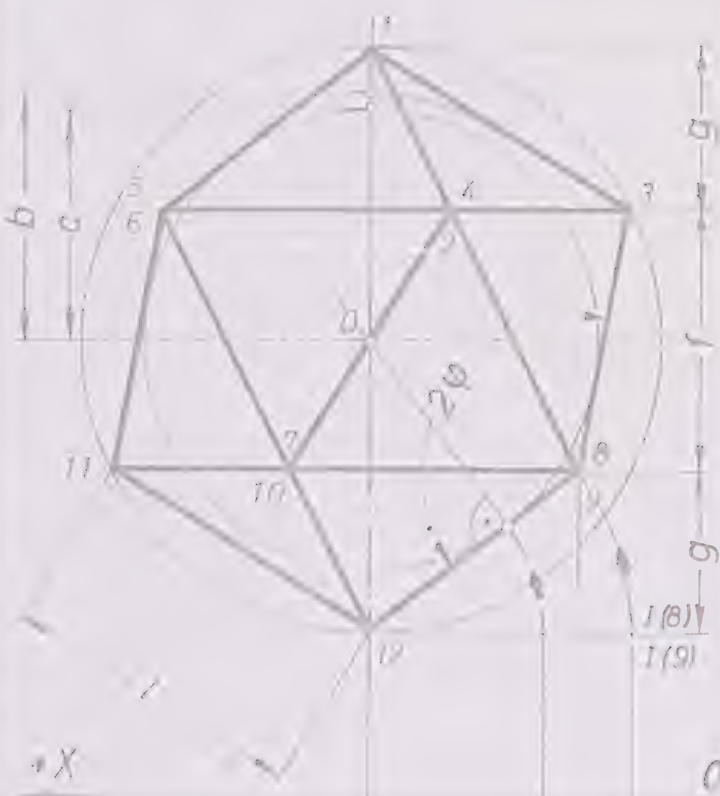
$g = i \qquad 2k = d \qquad e = f$

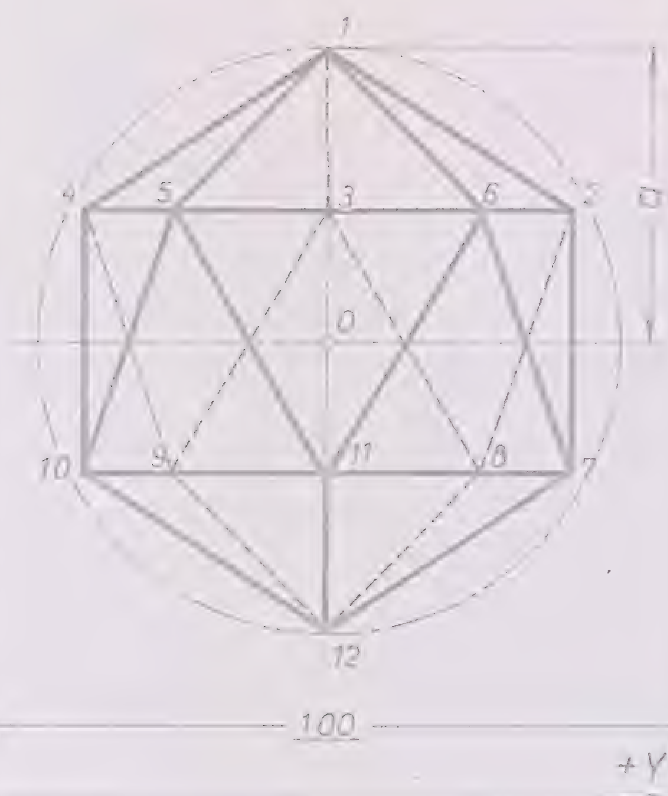
$g + f = 2h$

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala 1:2,5	Icosaedro regular convexo	Lámina Curso 19 -19

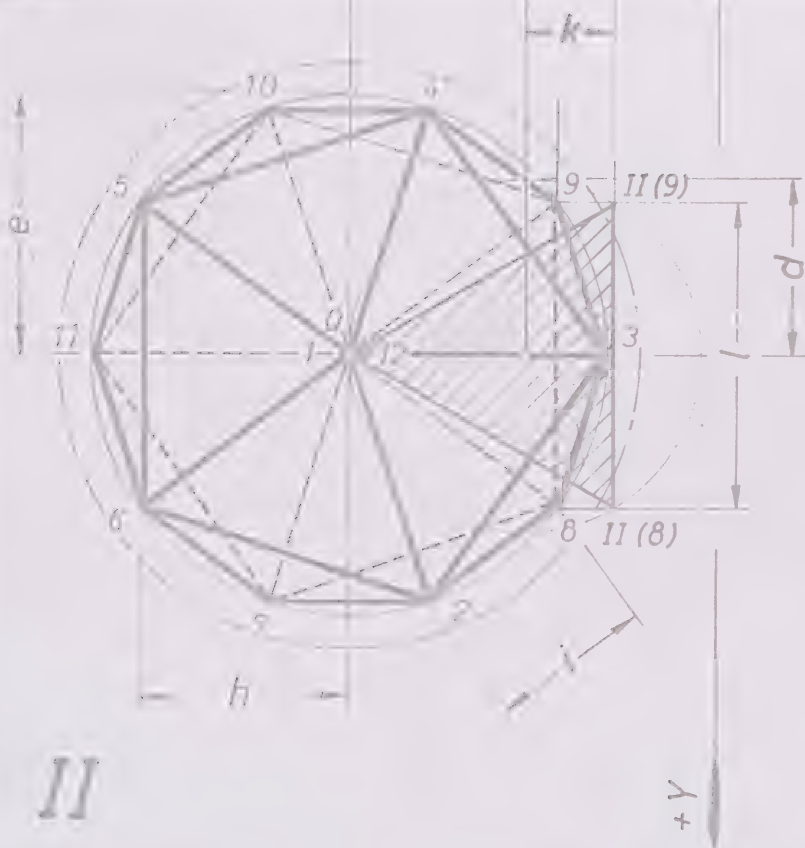
+Z





100

0 +Y



117

<u>DATOS:</u> { 0 (120, 120, 150) mm.
{ l = 100 mm.

<u>RESULTADOS:</u>

a = 0,95 10 57.... l = 95,1
b = 0,80 90 17.... l = 80,9
c = 0,75 57 61.... l = 75,6
d = 0,57 73 50.... l = 57,7
e = 0,85 06 51.... l = 85,1
2φ = 138° 11′ 23″
f = 0,85 06 51.... l = 85,1
g = 0,52 57 31.... l = 52,6
h = 0,68 81 91.... l = 68,8
i = 0,52 57 31.... l = 52,6
k = 0,28 86 75.... l = 28,9

g = i   2k = d   e = f

g + f = 2h

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala						

Cuadro resumen del cálculo de magnitudes en los cinco poliedros regulares convexos

1. TETRAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{6}}{4}\ \ell$	0, 61 23 72.... ℓ
b	$\frac{\sqrt{2}}{4}\ \ell$	0, 35 35 53.... ℓ
c	$\frac{\sqrt{6}}{12}\ \ell$	0, 20 41 24.... ℓ
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	0, 57 73 50.... ℓ
2φ	sen $\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0, 57 73 50 2φ = 70° 31' 43,4"
–	–	–
–	–	–
–	–	–
h	$\frac{\sqrt{6}}{3}\ \ell$	0, 81 64 97.... ℓ
–	–	–
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\ \ell$	0, 28 86 75.... ℓ
S	$\sqrt{3}\ \ell^2$	1, 73 20 51.... ℓ^2
V	$\frac{\sqrt{2}}{12}\ \ell^3$	0. 11 78 51.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$h = a + c$ $h = \frac{4}{3}a$ $h = 4c$
$a = 3c$ $d = 2k$

2. EXAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ell$	0, 86 60 25.... ℓ
b	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	0, 70 71 07.... ℓ
c	$\frac{1}{2}\ \ell$	0, 50 00 00.... ℓ
d	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	0, 70 71 07.... ℓ
2φ	sen $\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	0, 70 71 07.... ℓ 2φ = 90° 0' 00"
–	–	–
–	–	–
–	–	–
h	$1\ \ell$	1, 00 00 00.... ℓ
–	–	–
k	$\frac{1}{2}\ \ell$	0, 50 00 00.... ℓ
S	$6\ \ell^2$	6, 00 00 00.... ℓ^2
V	$1\ \ell^3$	1, 00 00 00.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$c = k$ $b = d$ $h = 2c$ $h = 2k$

3. OCTAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	0, 70 71 07.... ℓ
b	$\frac{1}{2}\ \ell$	0, 50 00 00.... ℓ
c	$\frac{\sqrt{6}}{6}\ \ell$	0, 40 82 48.... ℓ
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	0, 57 73 50 ℓ
2φ	sen $\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$	0, 81 64 97.... ℓ 2φ = 109° 28' 16,6"
–	–	–
–	–	–
–	–	–
–	–	–
–	–	–
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\ \ell$	0, 28 86 75.... ℓ
S	$2\sqrt{3}\ \ell^2$	3, 46 41 02.... ℓ^2
V	$\frac{\sqrt{2}}{3}\ \ell^3$	0, 47 14 05.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$d = 2k$ $\ell = 2b$

4. DODECAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\ \ell$	1, 40 12 59.... ℓ
b	$\frac{3+\sqrt{5}}{4}\ \ell$	1, 30 90 17.... ℓ
c	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\ \ell$	1, 11 35 16.... ℓ
d	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51.... ℓ
2φ	sen $\varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	0, 85 06 51.... ℓ 2φ = 116° 33' 54,2"
e	$\sqrt{\frac{5+3\sqrt{5}}{[illegible]}}\ \ell$	1, 37 63 82.... ℓ
f	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 52 57 31.... ℓ
g	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51.... ℓ
–	–	–
i	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51.... ℓ
k	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ \ell$	0, 68 81 91.... ℓ
S	$3\cdot\sqrt{25+10\sqrt{5}}\ \ell^2$	20, 64 57 29.... ℓ^2
V	$\frac{7\sqrt{5}+15}{4}\ \ell^3$	7, 66 31 19.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$e = 2k$ $d = g = i$ $g + f = 2k$

5. ICOSAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\ \ell$	0, 95 10 57.... ℓ
b	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}\ \ell$	0, 80 90 17.... ℓ
c	$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\ \ell$	0, 75 57 61.... ℓ
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	0, 57 73 50 ℓ
2φ	sen $\varphi = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$	0, 93 41 72.... 2φ = 138° 11' 22,8"
e	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51.... ℓ
f	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51.... ℓ
g	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 52 57 31.... ℓ
h	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ \ell$	0, 68 81 91.... ℓ
i	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 52 57 31.... ℓ
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\ \ell$	0, 28 86 75.... ℓ
S	$5\sqrt{3}\ \ell^2$	8, 66 02 54.... ℓ^2
V	$\frac{15+5\sqrt{5}}{12}\ \ell^3$	2, 18 16 95.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$g = i$ $2k = d$ $e = f$ $g + f = 2h$

Cuadro resumen del cálculo de magnitudes en los cinco poliedros regulares convexos

1. TETRAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{6}}{4}\ \ell$	0. 61 23 72.... ℓ
b	$\frac{\sqrt{2}}{4}\ \ell$	0, 35 35 53.... ℓ
c	$\frac{\sqrt{6}}{12}\ \ell$	0, 20 41 24.... ℓ
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	0, 57 73 50.... ℓ
2φ	sen $\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0, 57 73 50 2φ = 70° 31' 43.4"
–	–	–
–	–	–
–	–	–
h	$\frac{\sqrt{6}}{3}\ \ell$	0.81 64 97.... ℓ
–	–	–
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\ \ell$	0, 28 86 75.... ℓ
S	$\sqrt{3}\ \ell^2$	1, 73 20 51.... ℓ^2
V	$\frac{\sqrt{2}}{12}\ \ell^3$	0. 11 78 51.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$h = a + c$ $\quad h = \frac{4}{3}a$ $\quad h = 4c$ $\quad a = 3c$ $\quad d = 2k$

2. EXAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ell$	0, 86 60 25.... ℓ
b	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	0. 70 71 07.... ℓ
c	$\frac{1}{2}\ \ell$	0, 50 00 00..... ℓ
d	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	0, 70 71 07..... ℓ
2φ	sen $\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	0, 70 71 07..... ℓ 2φ = 90° 00' 00"
–	–	–
–	–	–
–	–	–
h	$1\ \ell$	1, 00 00 00..... ℓ
–	–	–
k	$\frac{1}{2}\ \ell$	0, 50 00 00.... ℓ
S	$6\ \ell^2$	6. 00 00 00..... ℓ^2
V	$1\ \ell^3$	1, 00 00 00..... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$c = k$ $\quad b = d$ $\quad h = 2c$ $\quad h = 2k$

3. OCTAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	0, 70 71 07.... ℓ
b	$\frac{1}{2}\ \ell$	0, 50 00 00..... ℓ
c	$\frac{\sqrt{6}}{6}\ \ell$	0, 40 82 48.... ℓ
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	0, 57 73 50.... ℓ
2φ	sen $\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$	0, 81 64 97..... ℓ 2φ = 109° 28' 16,6"
–	–	–
–	–	–
–	–	–
–	–	–
–	–	–
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\ \ell$	0, 28 86 75..... ℓ
S	$2\sqrt{3}\ \ell^2$	3, 46 41 02.... ℓ^2
V	$\frac{\sqrt{2}}{3}\ \ell^3$	0. 47 14 05.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$d = 2k$ $\quad l = 2b$

4. DODECAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\ \ell$	1, 40 12 59.... ℓ
b	$\frac{3+\sqrt{5}}{4}\ \ell$	1. 30 90 17..... ℓ
c	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\ \ell$	1, 11 35 16..... ℓ
d	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0. 85 06 51..... ℓ
2φ	sen $\varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	0, 85 06 51..... ℓ 2φ = 116° 33' 54,2"
e	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ \ell$	1, 37 63 82.... ℓ
f	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 52 57 31..... ℓ
g	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51..... ℓ
–	–	–
i	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51.... ℓ
k	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ \ell$	0, 68 81 91..... ℓ
S	$3\cdot\sqrt{25+10\sqrt{5}}\ \ell^2$	20, 64 57 29..... ℓ^2
V	$\frac{7\sqrt{5}+15}{4}\ \ell^3$	7, 66 31 19.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$e = 2k$ $\quad d = g = i$ $\quad g + f = 2k$

5. ICOSAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\ \ell$	0, 95 10 57.... ℓ
b	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}\ \ell$	0, 80 90 17.... ℓ
c	$\frac{3\cdot\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\ \ell$	0, 75 57 61.... ℓ
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	0. 57 73 50.... ℓ
2φ	sen $\varphi = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$	0, 93 41 72.... 2φ = 138° 11' 22,8"
e	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51.... ℓ
f	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51.... ℓ
g	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 52 57 31.... ℓ
h	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ \ell$	0, 68 81 91.... ℓ
i	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 52 57 31.... ℓ
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\ \ell$	0, 28 86 75.... ℓ
S	$5\sqrt{3}\ \ell^2$	8, 66 02 54.... ℓ^2
V	$\frac{15+5\sqrt{5}}{12}\ \ell^3$	2, 18 16 95.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$g = i$ $\quad 2k = d$ $\quad e = f$ $\quad g + f = 2h$

GEOMETRIA

ANALÍTICO-DESCRIPTIVA

UNE A4 210 X 297

Se pretende:

Aplicar al "Sistema diédrico" de Monge, las simplificaciones, exactitud o ambas simultáneamente de los procedimientos de la Geometría analítica, con preferente orientación al "Dibujo técnico", especialmente en los problemas de intersecciones y desarrollos de superficies geométricas de tanta aplicación en calderería y construcción naval.

1.) Elección del sistema de ejes coordenados (triedro trirectángulo), y signo de coordenadas (fig. 1).



Figura 1

Plano YΩZ, el vertical V_s del diédrico.

Plano ZΩX, el horizontal H_a del diédrico

Plano XΩY, el de perfil en el diédrico

Se corresponden respectivamente en el dibujo técnico con las vistas: Anterior de proyección (vista principal de frente), con la superior (vista de arriba a abajo) y con la lateral izquierda (vista de izquierda a derecha), en el sistema europeo de representación.

2.) <u>Nomenclatura</u>:

2.1) Planos $[\Omega, +Y, +Z]$ y $[\Omega, +Y, -Z]$, el vertical superior V_s del diédrico.

2.2) Planos $[\Omega, +Z, +X]$ y $[\Omega, -Z, +X]$, el horizontal anterior H_a del diédrico

2.3) Planos $[\Omega, -Y, +Z]$ y $[\Omega, -Y, -Z]$, el vertical inferior V_i del diédrico

2.4) Planos $[\Omega, +Z, -X]$ y $[\Omega, -Z, -X]$, el horizontal posterior H_p del diédrico

2.5) Planos $[\Omega, +X, +Y]$ y $[\Omega, +X, -Y]$, el perfil anterior P_a del diédrico

2.6) Planos $[\Omega, -X, +Y]$ y $[\Omega, -X, -Y]$, el perfil posterior P_p del diédrico.

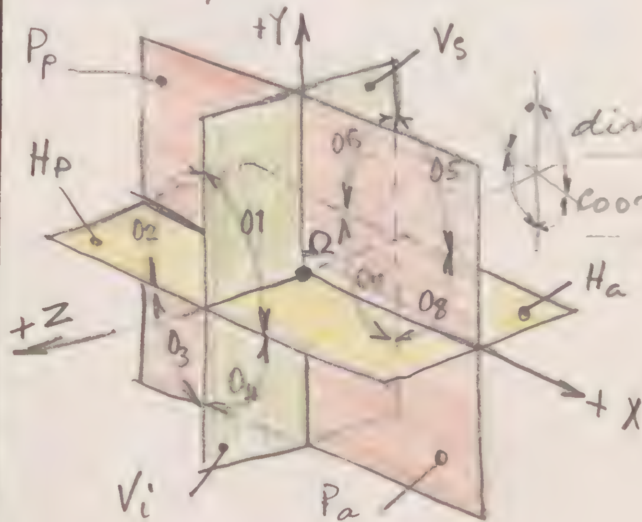


Figura 2

3.) Nomenclatura de la división del espacio por los ejes coordenados (fig. 2)

01	Octante	n° 1
02	"	n° 2
03	"	n° 3
04	"	n° 4
05	"	n° 5
06	"	n° 6
07	"	n° 7
08	"	n° 8
Ω	Origen de coordenadas	

4.) Rebatimientos de los planos coordenados

Se hacen sobre el vertical que se supone el plano del dibujo (proyección de la vista principal en el sistema europeo)

4.1) El horizontal anterior Ha se rebate hacia abajo, girando alrededor de Ω Z, hasta coincidir con el vertical inferior V_i. Al mismo tiempo, el horizontal posterior gira hacia arriba hasta coincidir con el V_s

4.2) El perfil anterior P_a se rebate hacia atrás, girando alrededor de ΩY, hasta coincidir con el vertical V_s y V_i. Al mismo tiempo el P_p gira hacia adelante hasta coincidir con el V_s y V_i

Con estos rebatimientos los ejes coordenados y el origen quedarán según la figura 3

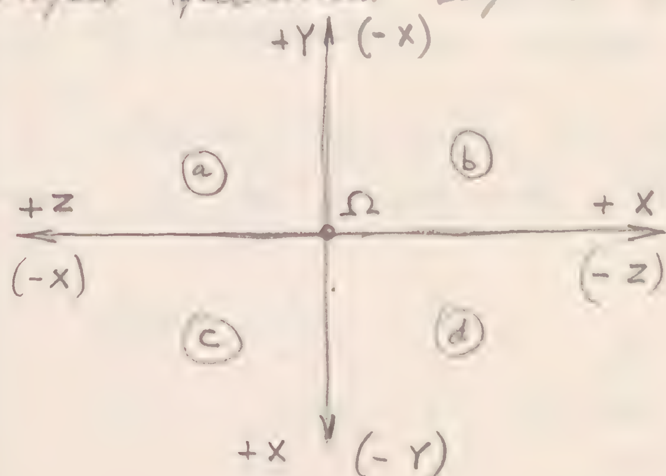


Figura 3

Coinciden los planos:

4.3) En zona a : V_s, H_p, P_p

4.4) En zona b : V_s, H_p, P_a

4.5) En zona c : V_i, H_a, P_p

4.6) En zona d : V_i, H_a, P_a

5.) Determinación del punto en el espacio

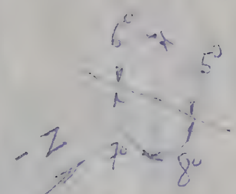
Un punto queda determinado en el espacio por sus tres coordenadas x, y, z.

Las coordenadas son números reales afectadas de signo.

Si se establece su unidad de medida y escala de dibujo adecuadas, puede ser representado gráficamente por las proyecciones ortogonales del punto sobre los tres planos coordenados ΩYZ (vertical), ΩZX (horizontal) y ΩXY (perfil).

Si se fija gráficamente la posición del origen Ω como intersección de dos de los ejes (Y y Z; Z y X; X e Y), el punto queda perfectamente determinado con solo dos de sus pro-

Y
+
-Z
Perfil
P
V
vertical
-X
a_V
O
a
M_P
a_P
M_V
z
x
y
M
a_H
horizontal
H
+X
+Z
M_H
Y



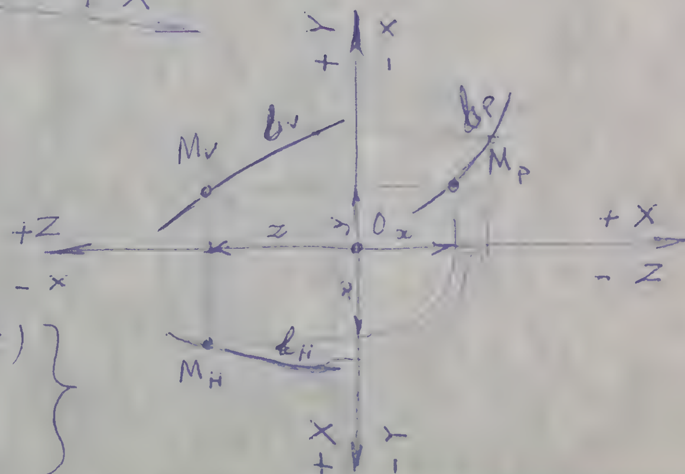
$M \; (x, \; y, \; z)$

$M_V \; (y, \; z)$

$M_H \; (z, \; x)$

$M_P \; (x, \; y)$

$$\left.\begin{aligned} MM_V &= x \\ MM_H &= y \\ MM_P &= z \end{aligned}\right\}$$



$$\left.\begin{aligned} a &= \varphi \, (x, \; y, \; z) \\ a_V &= \varphi_V \; (y, \; z) \\ a_H &= \varphi_H \; (z, \; x) \\ a_P & \;\; \varphi_P \; (x, \; y) \end{aligned}\right\}$$

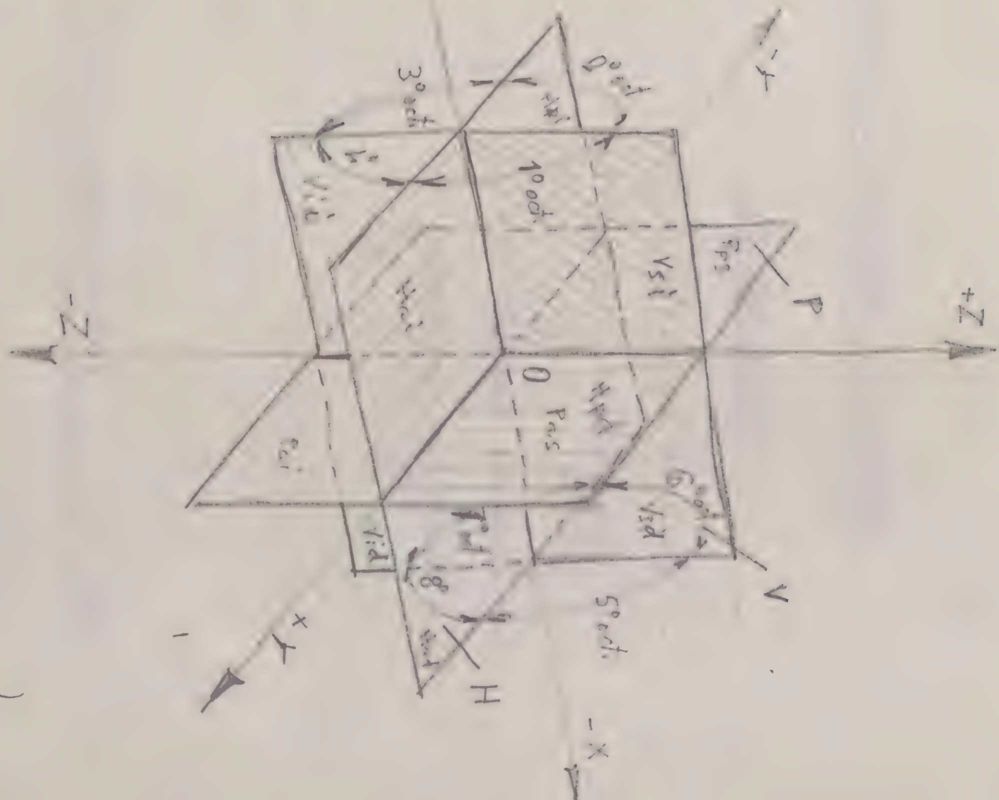
V1 | 1V | a.V | (21-33) V
H1 | 1H | a.H | (21-33) H
$a_{(+-)}$; V_{P1} | 1P | a.P

1. V   23. V   a. V   tM. V (t_m. V)
1. H   23. H   a. H   tM. H (t_m. H)
1. P   23. P   a. P   tM. P

T_a. V t_m t_Q

4 (+5, -3, -2) a_B. V

t_m t_Q



ESCUELA DE INGENIERIA TECNICA INDUSTRIAL DE SEVILLA

ORDEN DEL DIA

1.- Plan de Estudios

2.- Universidad Politecnica del Sur

3.- Asuntos varios

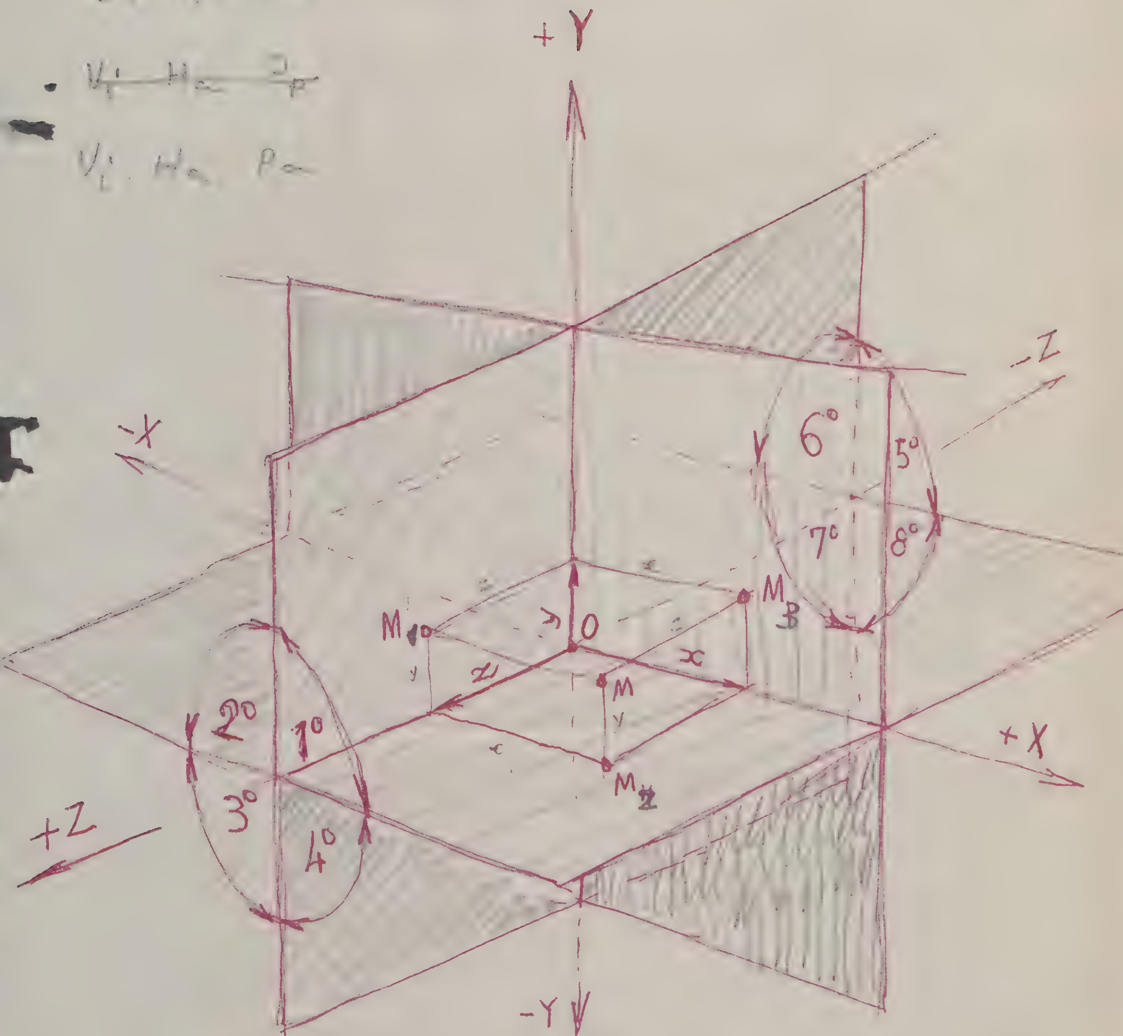
4.- Ruegos y preguntas

Por disposición del Sr. Director se reune la Junta extraordinaria de Profesores de este Centro el día 2 de julio a las 7 de la tarde en 1ª citación y a las 7½ en segunda.

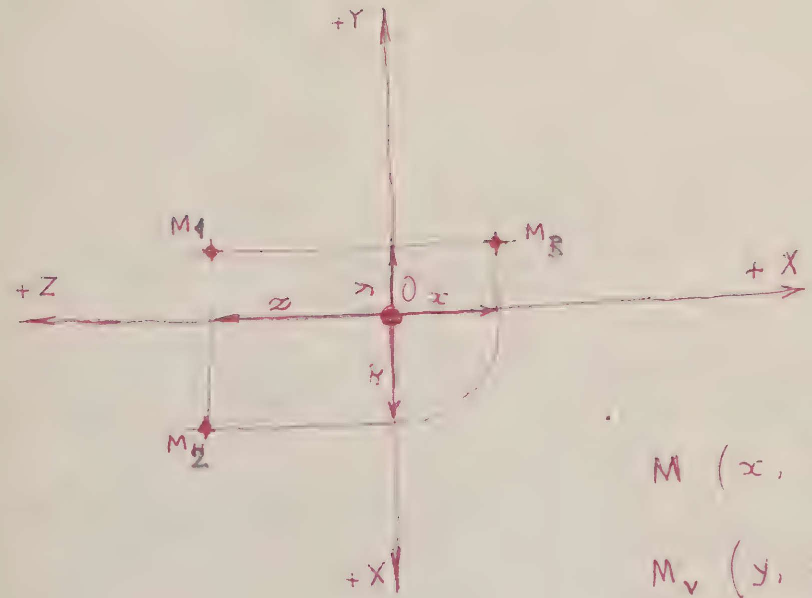
Lo que pongo en conocimiento de V. para que se sirva concurrir, y en caso de no hacerlo, manifestar por escrito las causas legales que lo impidan.

Sevilla, 30 de Junio de 1.971
EL SECRETARIO,

Sr. D. Tomas Alvarez Peralto



OCTANTES (8)	x	y	z
1°	+	+	+
2°	−	+	+
3°	−	−	+
4°	+	−	+
5°	+	+	−
6°	−	+	−
7°	−	−	−
8°	+	−	−



$M\ (x,\ y,\ z)$

$M_v\ (y,\ z)$

$M_H\ (z,\ x)$

$M_P\ (x,\ y)$

$\varphi\ (x,\ y,\ z) = 0$

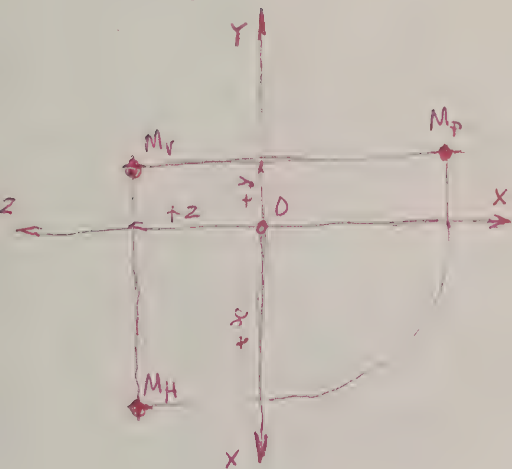
$\varphi_v\ (y,\ z) = 0$

$\varphi_H\ (z,\ x) = 0$

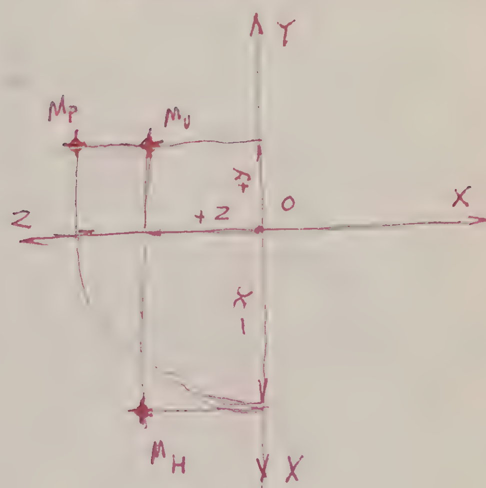
$\varphi_P\ (x,\ y) = 0$

x	y	z	
+	+	+	1°
+	+	−	5°
+	−	+	4°
+	−	−	8°
−	+	+	2°
−	+	−	6°
−	−	+	3°
−	−	−	7°

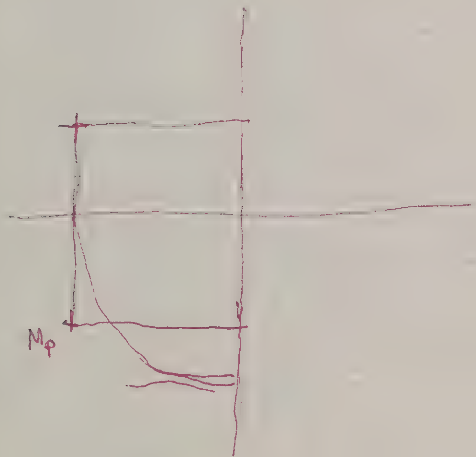
1° octante (+, +, +)

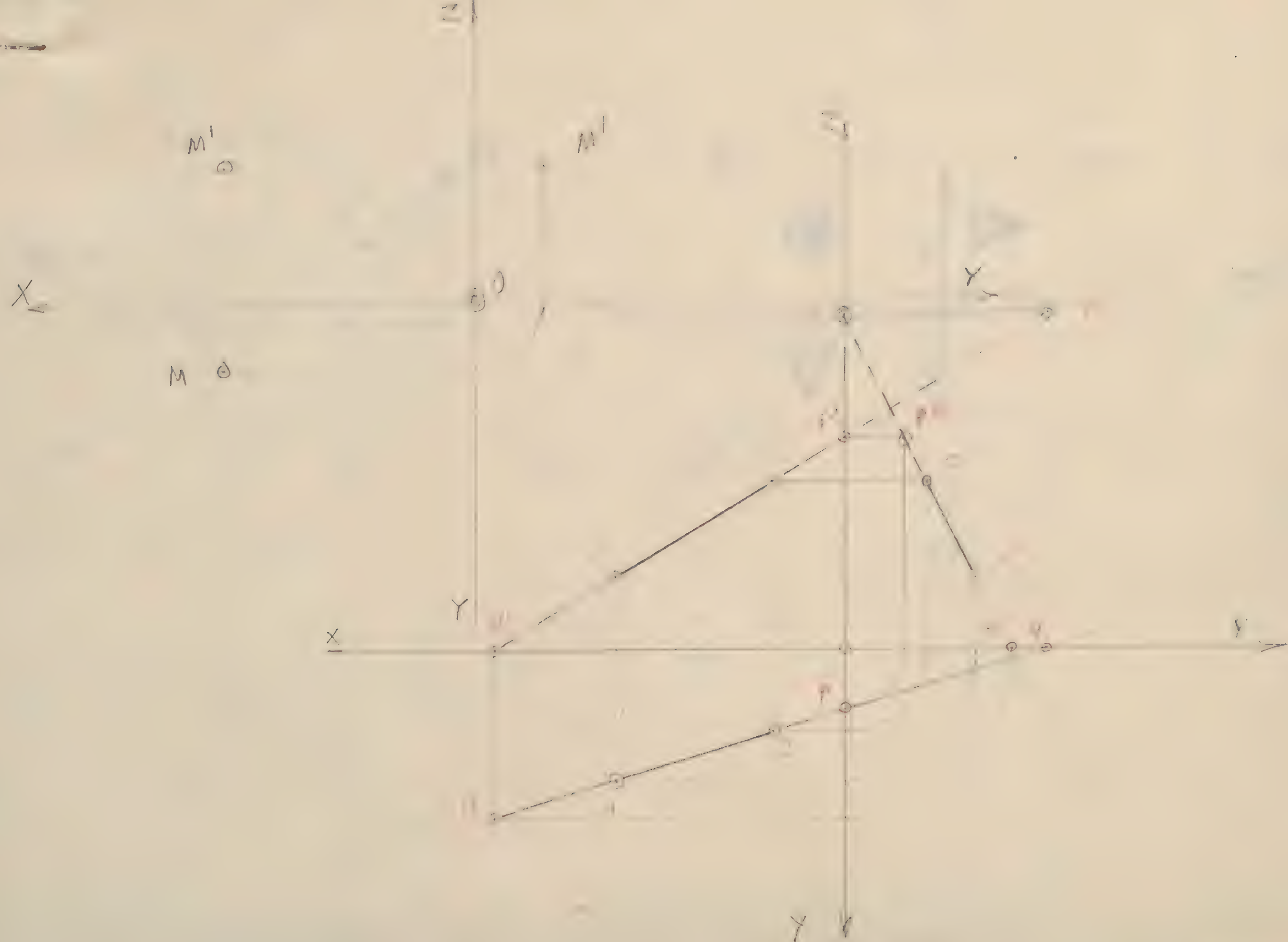


2° octante (−, +, +)

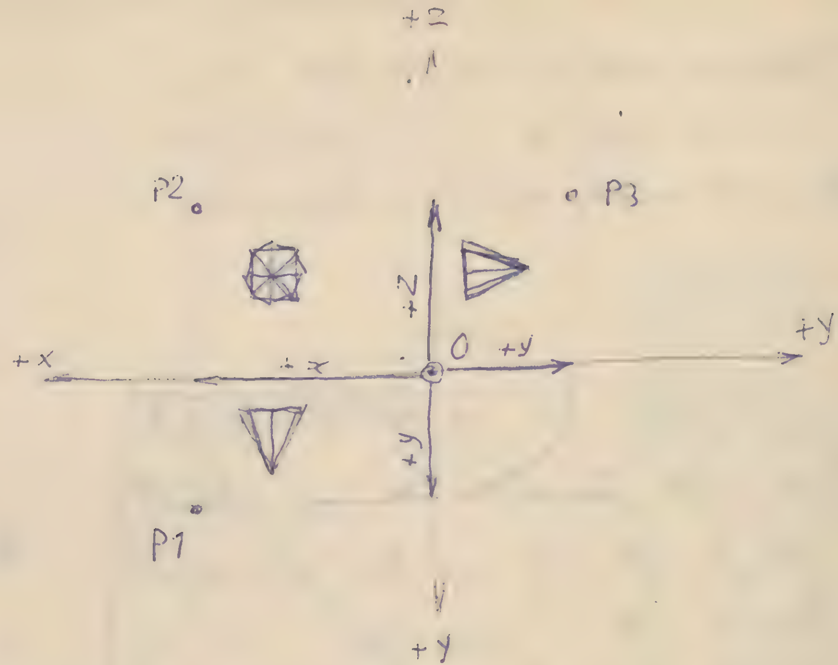


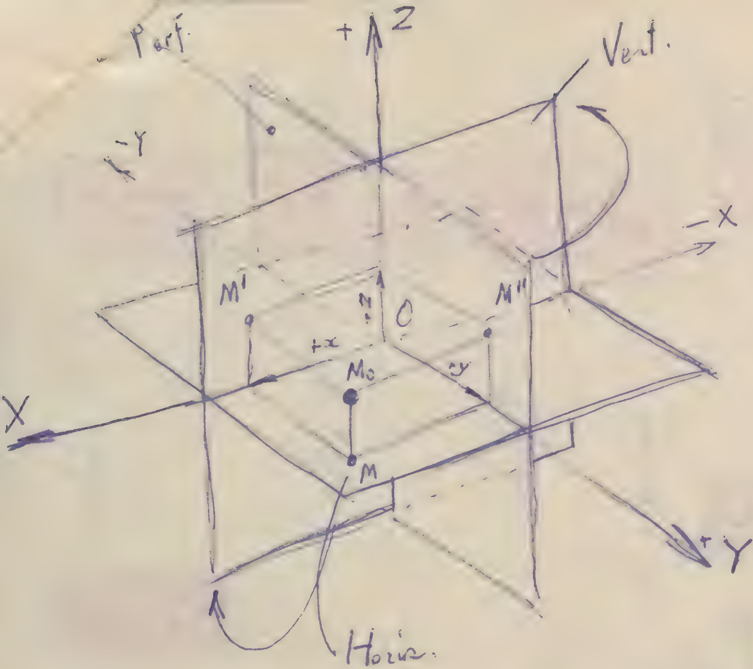
3er octante (−, −, +)




M'
M'
X
O
M
Y
X
Y
Y
Y


z
P3
P
P2
y
x
P1


+z
P2
P3
+z
+y
+x
+x
O
+y
+y
P1
y
+y



+ x ; dist. de. M_0 al plano de perfil
+ y ; id al plano vertical
+ z ; id. al plano horizontal

Nomenclatura :

Punto en el espacio: M_0 , 12_0 ...
Proyección id en H : M_* 12_* etc
" id en V : M' 12' etc
" id en P : M'' 12'' etc.

Recta en el espacio a_0 r_0 b_0
Proy. en H a, r b
" en V a' r' b'
" en P a'' r'' b''

Plano de proy. { Horizontal XY; Vert. XZ; Perfil YZ }

Π Σ ℝ
P_0 S_0

Plano en el espacio: ~~Π~~ ~~Σ~~ ~~etc.~~
Traza horizontal P(p p') S etc
vertical P'(p p') S' id.
perfil P'' S''

Proyecciones

Proyección del punto $\begin{Bmatrix} M_0 \\ B_0 \\ 42_0 \\ 8_0 \end{Bmatrix}$ sobre H = $\begin{Bmatrix} M \\ B \\ 42 \\ 8 \end{Bmatrix}$

Id. sobre V = $\begin{Bmatrix} M' \\ B' \\ 42' \\ 8' \end{Bmatrix}$

Id. sobre P = $\begin{Bmatrix} M'' \\ B'' \\ 42'' \\ 8'' \end{Bmatrix}$

Ecuación de la recta en el espacio
$a_0 = f(x, y, z)$

Proyección de la recta $\begin{Bmatrix} r_0 \\ a_0 \\ b_0 \end{Bmatrix}$ (excepto x, y, z) sobre H $\begin{Bmatrix} r \\ a \\ b \end{Bmatrix}$

Ecuación de la recta sobre H $a = f(x, y)$

Id. sobre V $\begin{Bmatrix} r' \\ a' \\ b' \end{Bmatrix}$

Ecuación de la recta sobre V $a' = f(x, z)$

Id. sobre P $\begin{Bmatrix} r'' \\ a'' \\ b'' \end{Bmatrix}$

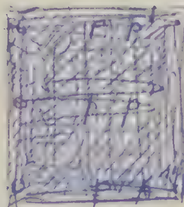
Ecuación de la recta sobre P $a'' = f(y, z)$

Proyección del plano Π_0, Σ_0, P_0

~~Por son~~ Traza horizontal P

Traza vertical P'

Traza perfil P''



...menclatura:

Punto en el espacio: { Letras mayusc. con subíndice cero
Números con subíndice cero.

Recta en el espacio: { Letras minúsculas con subíndice cero

Plano en el espacio. { Letras griegas mayúsculas. con subíndice cero

Planos de proyección

Horizontal o XY o plano H
Vertical o XZ o plano V
Perfil o YZ o plano P

Ejes coordenados

Eje X, intersec. del horizontal y vertical
Eje Y, id. del horizontal y perfil
Eje Z, id. del vertical y perfil.

Origen de coordenadas

Punto O de coordenadas { $x = 0$ $y = 0$ $z = 0$

Posiciones del punto

A) Por su signo:

$+x$	$+y$	$+z$
$+x$	$+y$	$-z$
$+x$	$-y$	$+z$
$+x$	$-y$	$-z$
$-x$	$+y$	$+z$
$-x$	$+y$	$-z$
$-x$	$-y$	$+z$
$-x$	$-y$	$-z$

} 8 casos

B) Por su magnitud y signo

(4)

$x \neq y \neq z$

$x \neq y = z$

$x = y \neq z$

$x = y = z$

(8) $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$	(4) $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z = 0$	(4) $x \neq 0$, $y = 0$, $z \neq 0$	(4) $x = 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$
(2) $x \neq 0$, $y = 0$, $z = 0$	(2) $x = 0$, $y \neq 0$, $z = 0$	(2) $x = 0$, $y = 0$, $z \neq 0$	(1) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

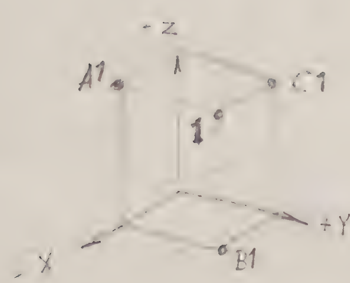
$4 \times 8 \times (8 + 3 \times 4 + 3 \times 2 + 1) = 216$ posiciones

32

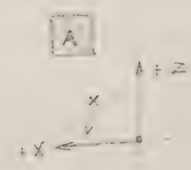
8×4

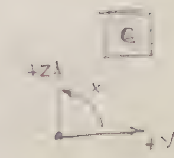
$8 \times 2 \times$





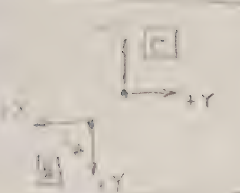


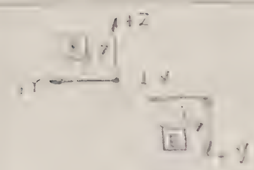


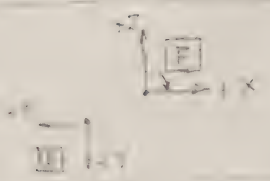


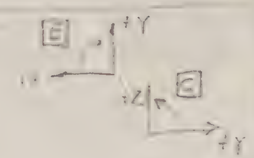












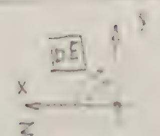








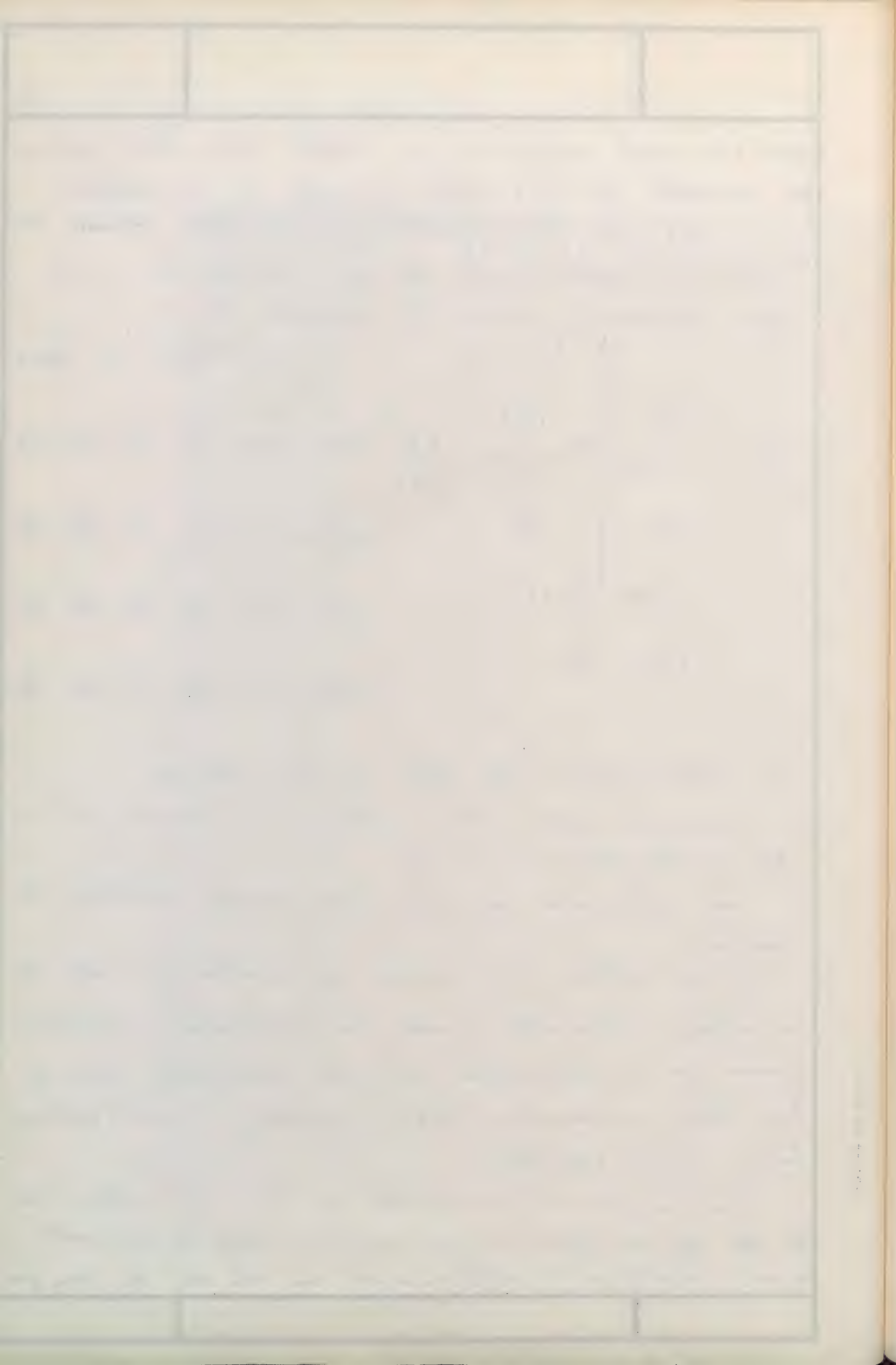






AB ·	BC ·	CD	DE ·
AC ·	BD ·	CE ·	DF ·
AD ·	BE	CF ·	
AE ·	BF ·		
AF			

AF, BE, CD,



yecciones (vertical y horizontal; vertical y perfil; horizontal y perfil). Por razones prácticas es conveniente utilizar la 1ª ó 2ª; en la 3ª, la correspondencia de proyecciones es artificiosa.

Las dos proyecciones gráficas permiten a su vez medir sus tres coordenadas, en relación con el origen Ω fijado.

6.) Posición del punto en el espacio, con respecto al signo de las coordenadas (finitas y no nulas).

x	y	z		
+	+	+	1er octante	(01)
−	+	+	2º "	(02)
−	−	+	3er "	(03)
+	−	+	4º "	(04)
+	+	−	5º "	(05)
−	+	−	6º "	(06)
−	−	−	7º "	(07)
+	−	−	8º "	(08)

7. Nomenclatura para puntos, rectas, planos y ángulos

7.1) Puntos en el espacio: Latinas mayúsculas A, B, C . . . o números 1, 2, 3 . . .

7.2) Rectas en el espacio: Latinas minúsculas a, b, c . . . o determinadas por dos puntos (segmento) AB, BC, . . . 12, 23, . . .

7.3) Planos en el espacio: Griegas minúsculas α, β . . .

7.4) Ángulos en el espacio: Griegas minúsculas $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ . . .

7.5) Proyecciones de los anteriores elementos: La vertical (Ω Y Z) con el subíndice 1; p. e. P_1. La horizontal (Ω Z X) con el subíndice 2; p. e. . . . ; perfil (Ω X Y) con el subíndice 3; p. e. . . . α_2

a_{20} La de

8. Planos bisectores

En cada octante podemos considerar tres planos bisectores de los tres diedros que forman el triedro de los ejes.

Designaremos p. e. BY1 como el bisector que pasa por el eje Y en el primer octante, BY3 en el tercer octante, etc.

De esta forma tendremos designados $3 \times 8 = 24$ planos bisectores en los ocho octantes, de los cuales cada cuatro forman un plano único, por lo que en total existen 6 planos diferentes. Así pues

BX1 = BX2 = BX7 = BX8
BY1 = BY4 = BY6 = BY7
BZ1 = BZ3 = BZ5 = BZ7
BX4 = BX5 = BX3 = BX6
BY2 = BY3 = BY5 = BY8
BZ2 = BZ4 = BZ6 = BZ8

} 6 planos bisectores

9. Ejes bisectores

En cada octante podemos considerar un eje bisector, recta intersección de los tres planos bisectores de cada uno de ellos.

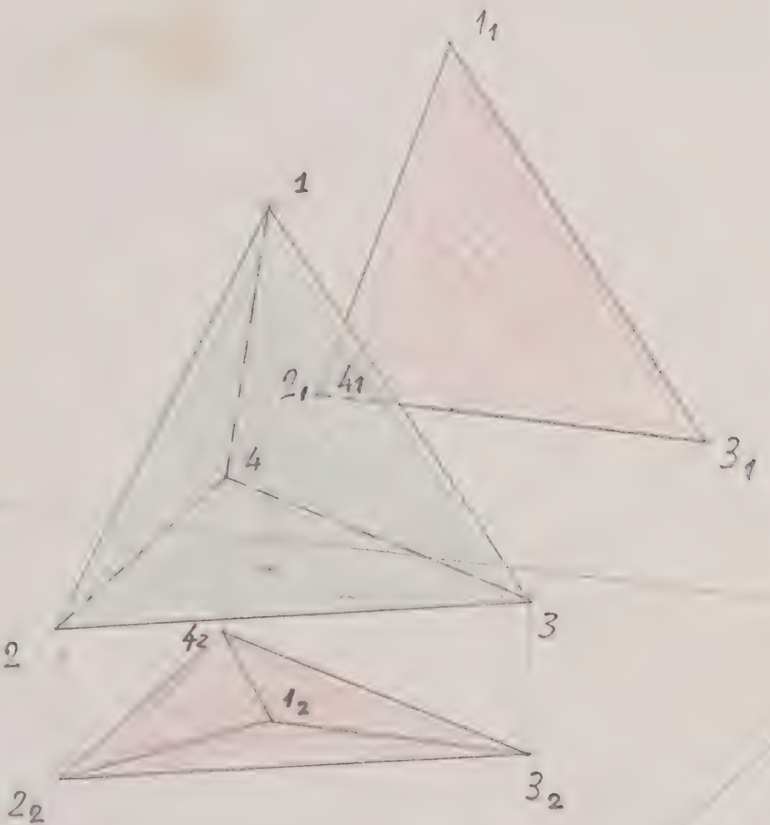
Designaremos p. e. E3 el eje bisector del octante 3°, y análogamente para los siete restantes.

Los ejes bisectores pasan por el origen y cada dos de ellos forman una recta única por lo que en total existen 4 ejes diferentes. Así pues

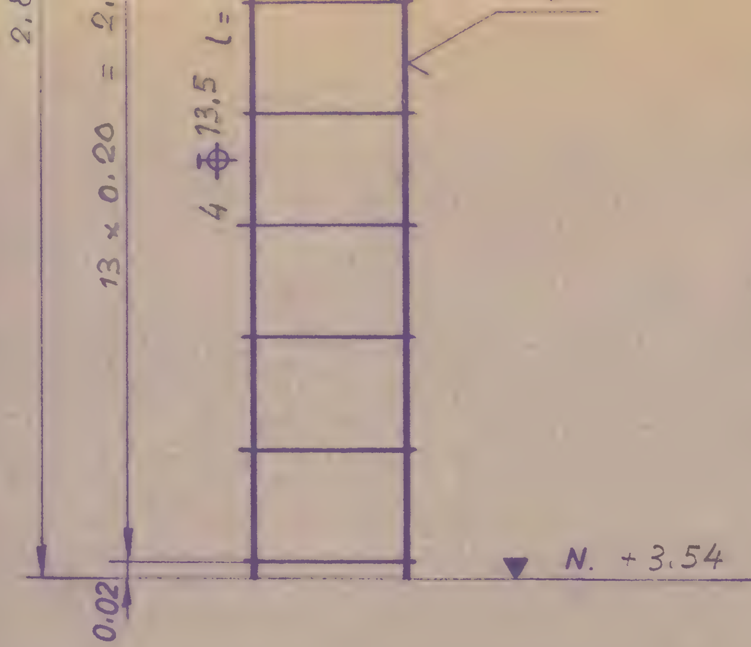
E1 = E7; E2 = E8; E3 = E5; E4 = E6

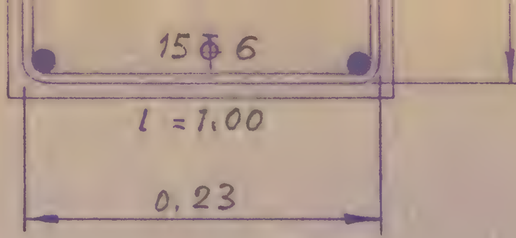
10. Posiciones del punto en el espacio en función de las magnitudes y signos de sus coordenadas

		Magnitud	Signo	Total
10.1	Las tres coordenadas desiguales y no nulas	1	8	8
10.2	Dos coordenadas iguales y una desigual no nulas (en un plano bisector)	3	8	24
10.3	Tres coordenadas iguales no nulas (en un eje bisector)	1	8	8
10.4	Dos coordenadas desiguales y la tercera nula (en un plano de proyección)	3	4	12
10.5	Dos coordenadas iguales y la tercera nula (en un plano de proyección y además en un bisector	3	4	12
10.6	Una coordenada no nula y las otras dos nulas (en un eje de proyección)	3	2	6
10.7	Las tres coordenadas nulas (en el origen)	1	-	1
	Total posiciones			71


+Z
V (1)
1₁
1
2₁ 4₁
3₁
+X
4
0
2
4₂
3
1₂
2₂
3₂
H (2)

α	a = sen α − α cos α	b = α − sen α	a : b = x
10°	0.00 17 67	0,00 08 85	1.99 66 10
20°	0.01 40 65	0,00 70 46	1,98 76 53
30°	0,04 65 50	0.02 35 99	1,97 25 41
40°	0,10 80 03	0.05 53 25	1,95 21 55
50°	0.20 51 05	0,10 66 21	1,92 36 83
60°	0,34 24 26	0.18 11 73	1,89 00 50
70°	0.52 18 37	0,28 20 37	1,85 02 43
80°	0.74 82 50	0,41 14 55	1,80 39 64
90°	1,00 00 00	0.57 07 96	1,75 19 39

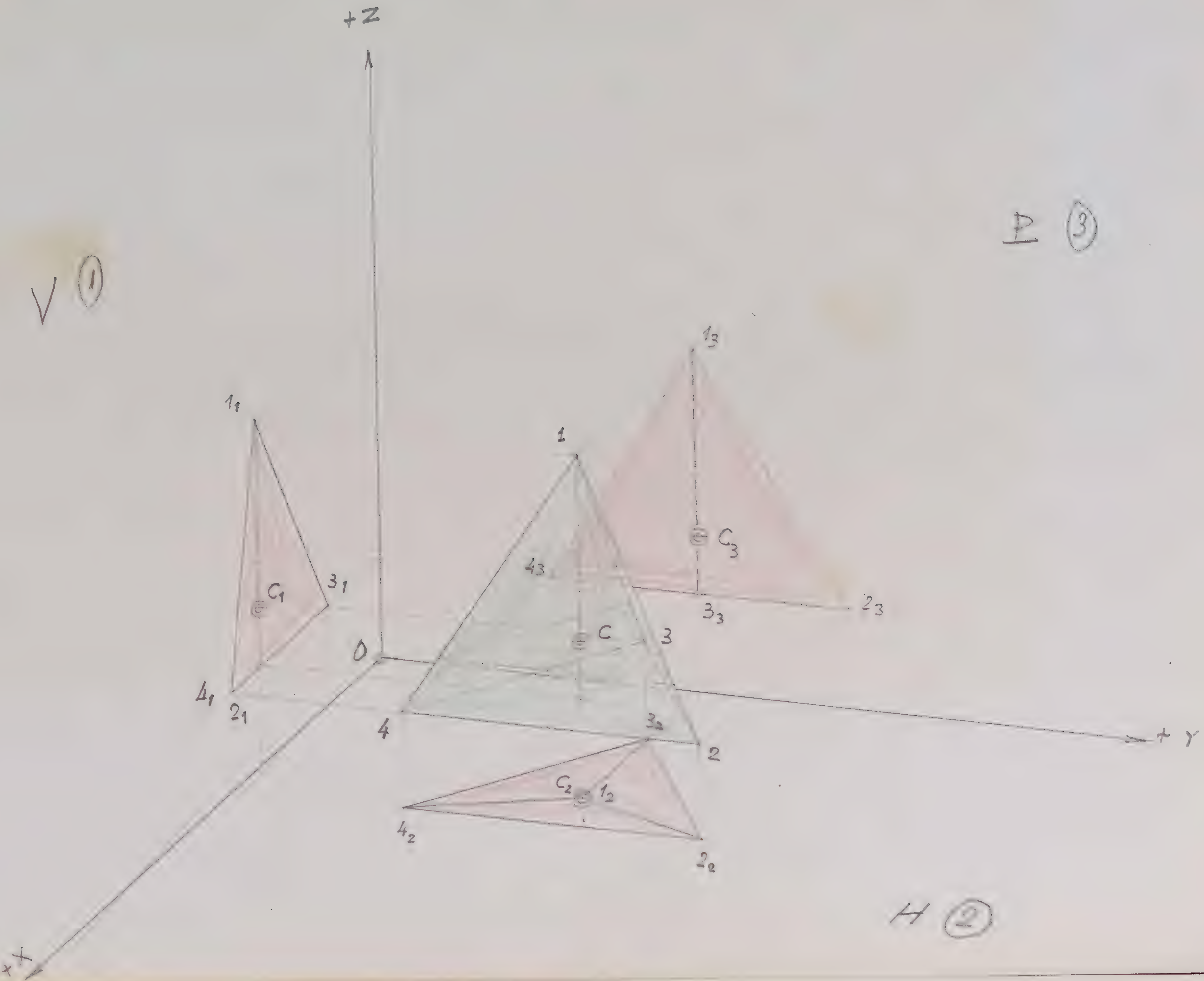




Observaciones	Marca	Nº de piezas	Perfil	Longitud	Peso unitario	Peso	Pilares iguales en nivel N. 2	
Pilar 0,25 x 0,25							Marca	Kgs.
Nos P. 9 - 12	1	4	Φ 13.5	3,38	1,225	16,6	P. varios	
(2 pilares)	2	15	Φ 6	1,00	0,243	3.6	2 x 20,2	40,4
						20,2	Total kgs.	40,4
Expte. nº 102-							Fecha: 6-70	

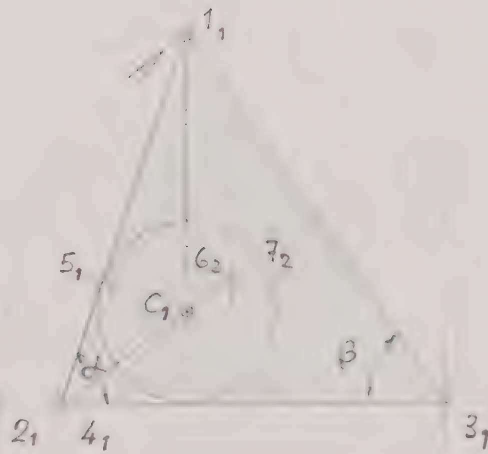
$x = r \dfrac{\operatorname{sen}\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \operatorname{sen}\alpha}$ $\qquad \dfrac{\pi}{18} = 0{,}17\ 45\ 32\ 92$

	α		sen α	cos α	α cos α
0°	= π : 18	= 0.17 45 33	0,17 36 48	0. 98 48 08	0,17 18 81
0°	= 2π : 18	= 0.34 90 66	0,34 20 20	0. 93 96 93	0,32 80 15
0°	= 3π : 18	= 0,52 35 99	0,50 00 00	0. 86 60 25	0,45 34 50
0°	= 4π : 18	= 0.69 81 13	0,64 27 88	0. 76 60 44	0.53 47 85
50°	= 5π : 18	= 0.87 26 65	0,76 60 44	0, 64 27 88	0,56 09 39
0°	= 6π : 18	= 1.04 71 98	0,86 60 25	0. 50 00 00	0,52 35 99
0°	= 7π : 18	= 1.22 17 30	0,93 96 93	0. 34 20 20	0,41 78 56
0°	= 8π : 18	= 1,39 62 63	0.98 48 08	0, 17 36 48	0.24 25 58
90°	= 9π : 18	= 1,57 07 96	1,00 00 00	0, 00 00 00.	0,00 00 00


+Z
V (1)
P (3)
H (2)
+Y
+X
O
1
2
3
4
1_1
2_1
3_1
4_1
C_1
1_2
2_2
3_2
4_2
C_2
1_3
2_3
3_3
4_3
C_3
C

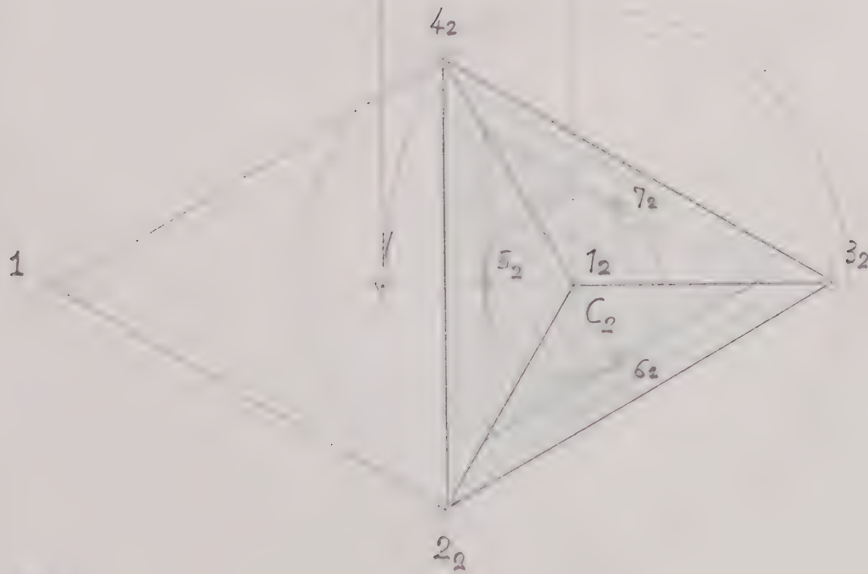
+Z

V ①



P ③

-X



H ②

+Y

Para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sen $\alpha = 1$; cos $\alpha = 0$

$$x = \frac{r\,(\text{sen}\,\alpha - \alpha \cos \alpha)}{\alpha - \text{sen}\,\alpha} = \frac{r\,(1-0)}{\frac{\pi}{2} - 1} = r \frac{1}{\frac{\pi - 2}{2}} = r \frac{2}{\pi - 2} = r \frac{2}{1{,}1416} =$$

$\cong 1{,}2\,r$ $\cong 1{,}752\ r \cong r + \frac{3}{4} r$

$\alpha = 0$



1,1416
1,752

20000
85840
59280
22300

Para $\alpha = 0$ sen $\alpha = 0$

cos $\alpha = 1$

$$x = \frac{r\,(0 - 0)}{0 - 0} = \frac{0}{0}$$

$OA = OE = r$

$AB = r \,\text{sen}\, \alpha$

$OB = r \cos \alpha$

$\overset{\frown}{AE} = CE = r\alpha$

$AD = OE - OB = r - r\cos\alpha$

$CD = CE - DE = r\alpha - AB = r\alpha - r\,\text{sen}\,\alpha$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{FE} ; \quad \frac{(r\alpha - r\,\text{sen}\,\alpha)}{r - r\cos\alpha} = \frac{r\alpha}{x + r}$$

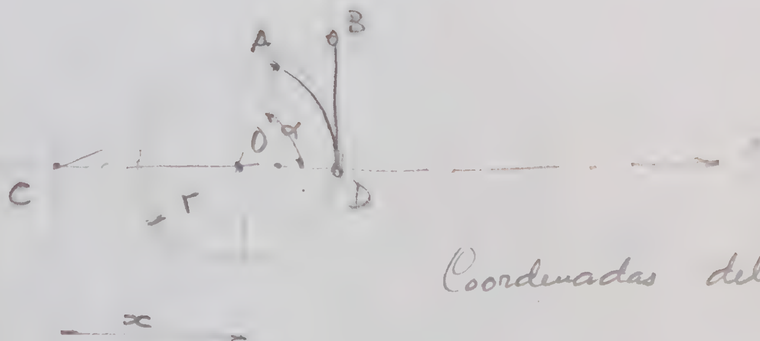
$$-x + r = \frac{r\alpha\,(r - r\cos\alpha)}{r(\alpha - \text{sen}\,\alpha)} = \frac{\alpha r\,(1 - \cos\alpha)}{\alpha - \text{sen}\,\alpha}$$

$$-x = \frac{\alpha r\,(1 - \cos\alpha)}{\alpha - \text{sen}\,\alpha} - r = \frac{\alpha r - \alpha r\cos\alpha - \alpha r + r\,\text{sen}\,\alpha}{\alpha - \text{sen}\,\alpha} = \frac{r\,(\text{sen}\,\alpha - \alpha\cos\alpha)}{\alpha - \text{sen}\,\alpha}$$



Rectificación de un arco de circunf.

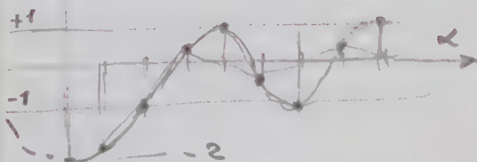
arc. AD = α r = BD



Coordenadas del punto A:

$x_1 = r \cos \alpha$

$y_1 = r \,\text{sen}\, \alpha$



Coordenadas del punto B:

$x_2 = r$

$y_2 = \alpha r$

Ecuación de la recta que pasa por A y B:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \; ; \quad y - r \,\text{sen}\, \alpha = \frac{\alpha r - r \,\text{sen}\, \alpha}{r - r \cos \alpha}(x - r \cos \alpha)$$

Punto de intersección de la recta AB, con el eje x

$y = 0$

$$-r \,\text{sen}\, \alpha = \frac{\alpha - \text{sen}\,\alpha}{1 - \cos \alpha}(x - r \cos \alpha),$$ de la cual se

deduce

$$x = r \frac{\alpha \cos \alpha - \text{sen}\, \alpha}{\alpha - \text{sen}\, \alpha} = -r \frac{\text{sen}\, \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \text{sen}\, \alpha} \ldots$$

$\alpha = 0$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$2\pi + \frac{\pi}{2}$	3π	$3\pi + \frac{3\pi}{2}$	4π
$x = -2r$	$-r\frac{2}{\pi - 2}$	$-r$	$+r\frac{2}{3\pi+2}$	$+r$	$-r\frac{2}{5\pi - 2}$	$-r$	$+r\frac{2}{7\pi+2}$	$+r$

UNE A4 210 X 297

	PROBLEMA.- Rectificación gráfica de un arco de circunferencia.	Hoja 1

1. Generalidades.- En general, un arco de circunferencia puede ser subtendido por un ángulo de cualquier magnitud, ~~positivo o negativo~~. Si el ángulo se expresa en radianes, dicha magnitud puede ser un número real cualquiera, ~~positivo o negativo~~. Cuando el ángulo sea mayor que 2π, puede descomponerse en suma de dos números, uno de los cuales sea un múltiplo entero $2k\pi$ ($k=1,2\ldots$) y otro menor que 2π. El desarrollo de este arco, tendrá una longitud suma de un número entero de circunferencias $2k\pi r$ y de un arco menor que una circunferencia. Si sabemos obtener gráficamente el desarrollo de dicho arco menor que una circunferencia, quedará resuelto el problema en general, ya que el de la circunferencia completa ha sido resuelto con gran aproximación en la ficha P. G. 2413.

Pero todo arco menor que una circunferencia puede oscilar entre cero y $2\pi r$, y mediante una o a lo más dos bisecciones sucesivas de este arco, fácilmente realizables con el compás podemos obtener, si fuese necesario, un arco mitad o un cuarto del dado, cuya magnitud esté comprendida entre cero y $\frac{\pi}{2} r$; si sabemos rectificar este último arco, el problema quedará resuelto de una forma general, cualquiera que sea la magnitud del arco dado.

2.- Estudio de la solución gráfica

Contribución al estudio de los

POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

Estudio gráfico y analítico de los

POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

Págs.

1 al 10

OBSERVACIONES PARA IMPRESIÓN

Frases sin subrayar ——— letra de texto vertical

Frases o letras con línea superior fina (recta o curva) _ letra de texto cursiva

Frases subrayadas o letras ——— letra negrita.

El texto en tinta roja, no se imprime.

Ver si es posible encontrar signo del punto en el centro de las minúsculas (8 · 15), probar si se puede componer 8 [▭] 15

Pedir paréntesis [para numeración de fórmulas

Letra cuerpo parecida a la de "Matemáticas" Doerfling (383).

POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

Capítulo I

Consideraciones generales

1. Objeto

El presente trabajo tiene por objeto el estudio detallado de los poliedros regulares, tanto en el aspecto gráfico de su representación como en el analítico para el cálculo de sus elementos fundamentales.

En su estudio gráfico, elegimos como sistema de representación el llamado "Sistema diédrico", debido principalmente a que al aplicar los procedimientos generales estudiados en la Geometría Descriptiva (cambios de planos, giros y abatimientos) nos permite operar con gran claridad y exactitud, no sólo para la simple representación de los poliedros, sino también para la obtención gráfica de sus elementos fundamentales, que nos han de servir de valiosa guía y ayuda en el cálculo analítico de dichos elementos.

Aún cuando el enfoque de este estudio es de aspecto puramente matemático, no se nos oculta la posibilidad de sus múltiples aplicaciones técnicas, especialmente en el campo de la arquitectura civil e industrial ya que, derivadas de los poliedros regulares, pueden obtenerse múltiples formas reticuladas espaciales que hoy día tanto se emplean para cubrir grandes espacios en forma de bóvedas poliédricas, que sustituyen ventajosamente a las esféricas de comple-

ja realización.

2. Consideraciones generales

La Geometría es la ciencia que estudia las propiedades de los cuerpos prescindiendo de sus propiedades físicas, y sólo tiene en cuenta las formas y dimensiones de los mismos. De aquí nace el concepto de "figura geométrica", ente ideal e intuitivo formado por un conjunto de puntos geométricos.

En toda figura geométrica se puede siempre considerar conjuntos parciales de infinitos elementos que forman líneas de contorno o interiores del cuerpo (rectas o curvas), superficies que lo separan del espacio exterior (planas o curvas) o puntos agrupados en espacios parciales (volúmenes).

Estos conjuntos parciales de infinitos elementos necesitan, para su estudio, de los conceptos generales de "punto", "recta" y "plano", conceptos primitivos e intuitivos, base y fundamento del desarrollo de la Geometría y de los cuales no puede darse una correcta definición. Son entes ideales sobre los que está basado todo el estudio de las diversas ramas de la Geometría racional, que a su vez forman parte de la Matemática en general.

La geometría estudia pues las propiedades de las figuras geométricas. Éstas pueden ser clasificadas en dos grandes grupos:

1° Propiedades gráficas, en relación con la posición relativa de los elementos componentes y ligadas por tanto a los conceptos de punto, recta y plano.

2° Propiedades métricas, en relación con los conceptos de medida, referentes a las nociones de longitud (de un segmento), amplitud (de un ángulo) y extensión de una figura (área o volumen).

Estas propiedades pueden ser estudiadas conjunta o sistemáticamente separadas. En este último caso, el estudio de las propiedades gráficas es el objeto de la llamada "Geometría proyectiva", y el de las propiedades métricas de la llamada "Geometría métrica". El estudio simultáneo de ambas propiedades pertenece a la "Geometría métrico-proyectiva".

Para facilitar el estudio de la Geometría, aún cuando no es absolutamente necesario, se pueden considerar figuras geométricas situadas en un plano (formas planas), o en el espacio (formas espaciales), lo cual permite una división de la Geometría en "Geometría plana" y "Geometría del espacio".

Los poliedros regulares convexos, objeto de este estudio, son figuras geométricas espaciales de tres dimensiones, en el cual aplicaremos propiedades tanto de las figuras planas (lados, ángulos, polígonos y áreas) como las del espacio (superficies poliédricas, esferas y volúmenes).

UNE A4 210 X 297

3. Directrices seguidas en este estudio.

Para el desarrollo del presente trabajo, nos hemos marcado previamente unas directrices que nos habían de servir de guía para obtener de forma ordenada las principales propiedades de los poliedros regulares, tanto gráficas como analíticas.

Como ya hemos indicado anteriormente, estas propiedades son objeto de estudio en la Geometría métrico-proyectiva, en la que generalmente las figuras en el espacio se representan en perspectiva (axonométrica), a fin de facilitar su mejor comprensión. Es indudable que esta representación da una idea bastante aproximada de la forma de la figura estudiada, que se asemeja a la obtenida en su visión directa; mas por otra parte presenta el inconveniente de que la perspectiva, en general, deforma las medidas longitudinales o angulares lo cual da lugar en esta representación a que segmentos iguales (o ángulos) en el espacio, aparezcan en la figura como desiguales (o viceversa), por cuyo motivo resulta a veces penoso el seguir un razonamiento sobre dichas figuras.

Éstos inconvenientes de representación, tanto en el sistema indicado como en otros que detallaremos después, son motivados al intentar resolver la dificultad de representar en un plano (plano del dibujo) que sólo tiene dos dimensiones, una figura tridimensional.

Por otra parte, en el estudio de las propiedades métricas de las figuras, pueden seguirse dos caminos diferentes:

a) El de la Geometría métrica que utiliza los conceptos básicos de medida de longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos para la determinación de longitudes (rectas o curvas), superficies (planas o curvas) y volúmenes (sólidos geométricos.

b) El de la Geometría analítica que, con los recursos del Álgebra, transforma las relaciones métricas en ecuaciones algebraicas mediante el empleo de coordenadas referidas a un sistema de ejes orientados, que en el espacio forman un triedro, generalmente trirectángulo, cuyas coordenadas pueden ser o bien tres segmentos rectilíneos (coordenadas cartesianas) o bien un segmento y dos ángulos (coordenadas polares)

4. Sistemas de representación

Trataremos exclusivamente en este estudio de la representación de figuras espaciales que pueden referirse a formas exteriores o interiores de objetos físicos que siempre tienen tres dimensiones, o de figuras geométricas; también incluiremos en esta representación las de figuras planas que tengan una determinada posición en el espacio. Por el contrario no incluiremos la representación de figuras planas en su propio plano, ya que este caso no presenta ninguna dificultad de trazado ni de interpretación.

Para que un sistema de representación sea eficaz en el estudio de las propiedades de las figuras geométricas, es necesario que cumpla las dos condiciones siguientes:

1º Que dado un objeto o figura en el espacio, se pueda obtener la representación de la misma en un plano, mediante la construcción de una o varias figuras relacionadas con el mismo, de tal manera que exista una correspondencia entre éstas y el objeto, de ~~forma~~ biunívoca.

2º - Que, recíprocamente, dada la representación sobre un plano con una o varias figuras que se correspondan con la forma del objeto representado, poder deducir sin ambigüedad la forma y dimensiones de dicho objeto.

De lo expuesto anteriormente podemos puntualizar que el problema fundamental planteado en la representación de figuras espaciales consiste, (según hemos indicado anteriormente,) en la dificultad de representar en un plano que sólo tiene dos dimensiones, un objeto determinado que siempre tiene tres dimensiones.

Para conseguirlo existen diversos procedimientos conocidos con el nombre genérico de Sistemas de representación.

Los más fundamentales y de mayor aplicación son los siguientes:

1. Sistema diédrico
2. Sistema axonométrico
3. Sistema de plano acotado
4. Sistema cónico

4.1 Sistema diédrico

En este sistema, el objeto a representar (fig. 1), se proyecta ortogonalmente sobre dos planos indefinidos perpendiculares entre sí; después de obtenidas sus proyecciones sobre cada uno de ellos, se hace girar uno de los planos junto con su proyección correspondiente, hasta hacerlo coincidir con el plano del otro. De la correspondencia de las dos figuras proyección, situadas en un plano único (plano del dibujo), se deduce la forma y dimensiones del objeto en el espacio.

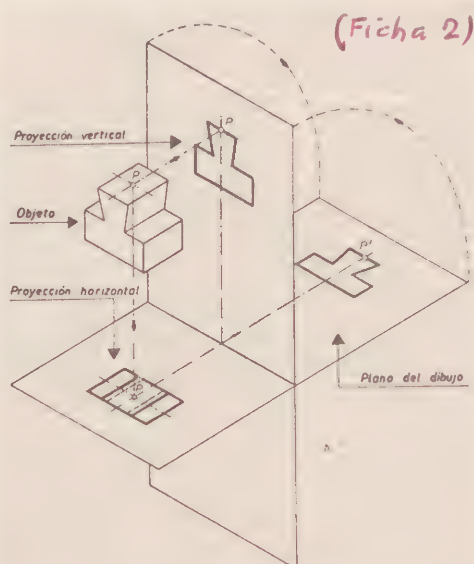


Fig. 1. - Sistema diédrico

Este sistema es el empleado casi exclusivamente en el Dibujo técnico, pues permite obtener con relativa facilidad las verdaderas magnitudes de segmentos rectilíneos y ángulos mediante el empleo sistemático de métodos adecuados (cambios de plano, giros o abatimientos), y en muchos casos directamente sobre sus proyecciones (segmentos o lados de ángulos paralelos a uno de los planos de proyección).

Su estudio y aprendizaje necesitan esfuerzo mental y tiempo hasta conseguir acostumbrarse a ver en el espacio, es decir, a deducir de una o varias figuras simultáneas que corresponden a distintas vistas o proyecciones de un mismo objeto, la forma que tiene el cuerpo en el espacio.

4.2 Sistema axonométrico

En este sistema el objeto a representar se proyecta ortogonalmente sobre las tres caras de un triedro trirrectángulo de ejes orientados (fig. 2) y al mismo tiempo sobre un plano oblicuo a dichas tres caras, llamado plano del dibujo, de cuyas proyecciones se representa (a veces) tan solo esta última oblicua, junto con la de los ejes o aristas del triedro.

Ficha 2

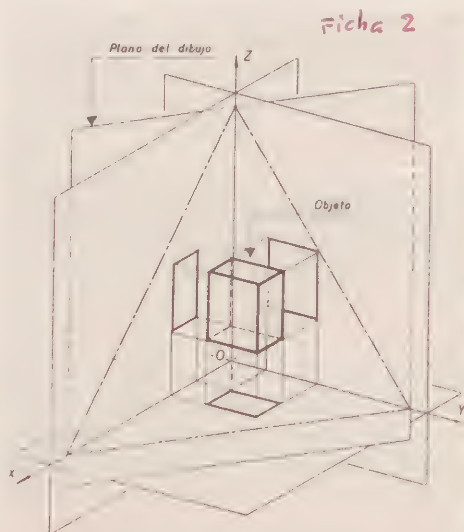


Fig. 2. - Sistema axonométrico

Esta última proyección tiene una apariencia de perspectiva que suele dar una idea muy aproximada de la forma del objeto en el espacio.

El sistema axonométrico permite la medida directa de segmentos paralelos a los ejes de proyección, mediante escalas adecuadas de reducción, una en el llamado sistema isométrico, dos en el sistema bimétrico y tres en el sistema trimétrico. Por el contrario, las medidas directas de segmentos no paralelos a los ejes y las amplitudes angulares necesitan construcciones auxiliares, ya que resultan deformadas en esta proyección oblicua.

4.3 Sistema de plano acotado

En este sistema se toma un plano de referencia como

plano del dibujo. En él se proyectan ortogonalmente los puntos del objeto a representar (fig. 3) y junto a cada punto proyectado se consigna, en una unidad elegida, la cifra correspondiente a la distancia que hay desde el punto al plano de proyección. Esta cifra va afectada del signo más o menos, según que el punto esté por encima o debajo del plano de referencia. Se emplea este sistema en cartografía y dibujos topográficos.

Ficha 2

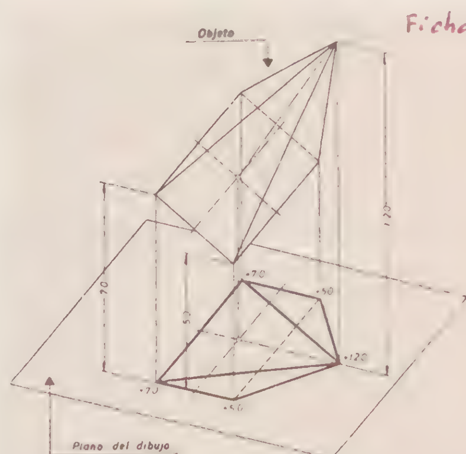


Fig. 3. - Sistema de plano acotado

4.4 Sistema cónico

Todos los puntos del objeto a representar, supuesto situado en el espacio en una posición determinada, se unen con un punto fijo llamado vértice o punto de vista principal, con lo cual obtendremos una radiación de rectas. Si cortamos esta radiación de rectas (fig. 4) por un plano cualquiera, a cada punto del objeto le corresponderá otro del plano, situados ambos en el mismo rayo. El plano secante es el plano del dibujo, y la figura resultante al unir

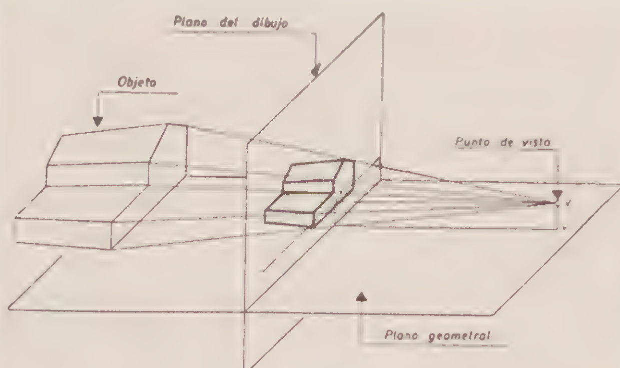


Fig. 4. - Sistema cónico

ordenadamente las proyecciones de los puntos del objeto sobre el plano del dibujo, es la llamada "perspectiva cónica" de dicho objeto.

Este sistema tiene gran aplicación en Arquitectura y Construcción civil, y con él obtenemos la visión monocular del objeto con su perspectiva casi real. Tiene el inconveniente de la dificultad de obtención de medidas de segmentos y amplitudes angulares (son posibles de obtener).

5. Métodos elegidos

Consecuentes con las directrices marcadas anteriormente elegimos los siguientes métodos de trabajo:

A) Para el estudio de las propiedades gráficas, el Sistema diédrico de representación que en muchos casos, y para facilidad de interpretación, ampliamos con la proyección en un plano de perfil teóricamente innecesario, pero que prácticamente nos facilita dicho estudio al aclarar dudas de interpretación que con frecuencia se presentan cuando el trazado es tan solo de dos proyecciones.

B) Para el estudio de las propiedades métricas haremos uso principalmente de fórmulas deducidas y estudiadas en la Geometría métrica, y de desarrollos algébricos elementales para la obtención de resultados, generalmente enfocados a la medición de segmentos o ángulos. Sólo en casos excepcionales haremos uso de las ecuaciones planteadas y estu-

Págs.

11 al 20

diadas en la Geometría analítica.

Al tener que usar indistintamente métodos empleados en diversas ramas de la matemática, como son por una parte los gráficos de la "Geometría descriptiva" en su Sistema diédrico, los métricos de la "Geometría métrica" y los analíticos de la "Geometría analítica", es muy conveniente establecer una clara coordinación de estas disciplinas, principalmente en relación con una común nomenclatura en la designación de puntos, rectas, planos, ángulos, etc.
Por otra parte, y teniendo en cuenta las posibles aplicaciones de este estudio a muy diversos sectores de la técnica, dicha coordinación debe extenderse también al Dibujo técnico cuyos principios de representación son análogos a los del Sistema diédrico, pero que al emplear sistemáticamente una amplia normalización, sin perjuicio de la claridad y exactitud, tiende a simplificar al máximo su ejecución e interpretación.

6. Nomenclaturas empleadas

Como justificación del criterio seguido en la elección de la nomenclatura adoptada, vamos a realizar previamente un resumen de la comúnmente empleada en el estudio de la Geometría métrica, de la Geometría descriptiva y de la Geometría analítica, así como la referente al Dibujo técnico

6.1 Nomenclatura de la geometría métrica

Ya hemos indicado anteriormente que en el estudio de las propiedades de las figuras geométricas del espacio se utilizan como medios gráficos de expresión, perspectivas axonométricas de dichas figuras que suelen dar una sencilla visión de conjunto de su forma y que permite seguir con relativa facilidad el razonamiento geométrico.

Una dificultad no pequeña de este sistema de representación en figuras espaciales es debida a la deformación geométrica de los elementos en perspectiva (líneas, ángulos o superficies). El concepto de la forma no se obtiene con la misma facilidad que en las figuras planas, y es necesario prestar la debida atención para p.e. darse cuenta que, en el cubo representado en la figura 5, la recta $\widehat{AC}$ es una diagonal de dicho cubo, y por lo tanto de mayor longitud que la arista $\widehat{BC}$; que el ángulo $\widehat{CDA}$ que aparece como agudo es en realidad recto, y que finalmente el ángulo $\widehat{ACE}$ que aparece como obtuso, es agudo.

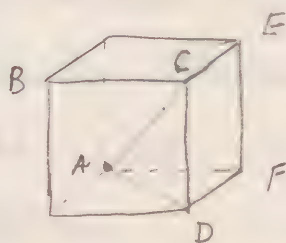


Figura 5

La nomenclatura más empleada, es la siguiente:

6.11 (Nomenclatura) para designar puntos aislados de una figura en el espacio

Se utilizan preferentemente letras mayúsculas latinas, y se lee p.e. punto: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, etc. (fig. 5). También

se utilizan cifras cuando los puntos a designar son muy numerosos.

6.12 (Nomenclatura) para la designación de rectas o segmentos rectilíneos

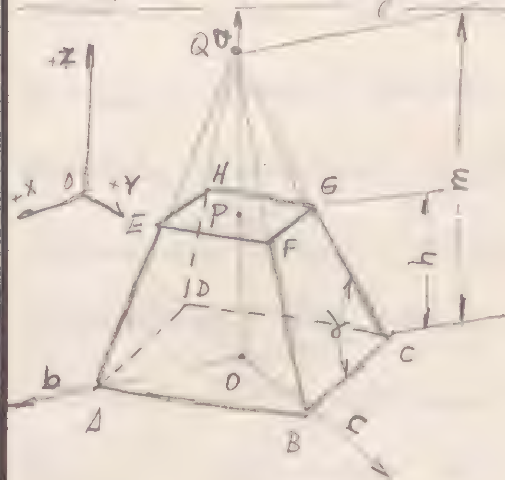


Figura 6

Si las rectas se consideran indefinidas, se designan con una letra minúscula latina; así p.e. para designar los ejes axonométricos de la figura 6, diremos recta (o eje) $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ o $\widehat{c}$.

Si se considera tan solo un segmento rectilíneo, se le designa normalmente con las letras mayúsculas de sus puntos extremos, y así diremos p.e. (fig. 6) segmento $\widehat{AB}$, $\widehat{EG}$, etc. También pueden designarse segmentos rectilíneos por letras minúsculas latinas, siempre que en la figura estén debidamente acotados según las normas correspondientes que se utilizan en el Dibujo técnico. Refiriéndonos a la figura 6, podemos designar indistintamente las alturas del tronco de pirámide o de la pirámide completa por los segmentos $\widehat{OP}$ y $\widehat{OQ}$, o también por los segmentos $\widehat{h}$ y $\widehat{m}$.

6.13 (Nomenclatura) para la designación de planos indefinidos o limitados por un contorno rectilíneo o curvilíneo.

Para la designación de planos indefinidos se utilizan preferentemente letras mayúsculas del alfabeto griego, [y así se dice p.e., plano "Δ", "Φ", "Σ", etc.] (Suprimir si no hay tipos de imprenta)

Si el plano está limitado por un contorno poligonal (caras de un poliedro) puede designarse por la enumeración ordenada (parcial o total) de sus vértices, y así se dice plano (o cara) $\widehat{ABCDEF}$, $\widehat{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4}$ ó $\widehat{AB\ldots EF}$. Si el contorno del plano es parcial o totalmente curvilíneo, se colocan letras mayúsculas (o cifras) intermedias en puntos no definidos del contorno y se lee como el anterior.

Independientemente de la nomenclatura expuesta, y teniendo en cuenta que un plano queda perfectamente determinado cuando pasa por: 1) tres puntos no alineados; 2) dos rectas secantes o paralelas; 3) una recta y un punto exterior a ella, podremos designar también dicho plano por la de los elementos que lo determinan, y así diremos plano $\widehat{ABC}$ (que pasa por tres puntos dados), plano $\widehat{ab}$ (que pasa por las dos rectas $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ secantes o paralelas) y plano $\widehat{aM}$ (que pasa por la recta $\widehat{a}$ y el punto exterior $\widehat{M}$.

6.14 (Nomenclatura) para la designación de ángulos

Los ángulos pueden designarse por la de las dos rectas que lo forman, y así decimos ángulo $\widehat{ab}$ refiriéndonos al formado por las rectas $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$; en esta de-

designación suele existir cierta ambigüedad, ya que el ángulo formado por dos rectas indefinidas que se cortan en general oblicuamente puede ser agudo u obtuso, según se considere el menor de ellos o el suplementario. Esta ambigüedad desaparece al orientar debidamente las semirrectas con origen en el vértice del ángulo.

Mejor designación es la de enumerar el ángulo (si es menor de dos rectos), mediante un punto tomado arbitrariamente en cada lado y el vértice, colocando siempre la letra del vértice en el centro; así diremos ángulo $\widehat{AOB}$ de lados (semirrectas) $\widehat{OA}$ y $\widehat{OB}$, y vértice $\widehat{O}$.

También es frecuente (y más preciso) la designación del ángulo con letras minúsculas griegas, siempre y cuando su amplitud esté debidamente acotada con la misma letra griega en el figura correspondiente; refiriéndonos a la figura 6, podemos decir indistintamente ángulo $\widehat{GCB}$ (el formado por las rectas $\widehat{GC}$ y $\widehat{CB}$), o también ángulo $\widehat{\alpha}$ (acotado). Esta designación sirve para ángulos de amplitud hasta cuatro rectos.

6.2 Nomenclatura en el sistema diédrico de representación.

Según hemos indicado en el párrafo 4.1, el sistema diédrico opera fundamentalmente con las proyecciones ortogonales de figuras geométricas sobre dos planos perpendiculares entre sí, cuyas proyecciones se llevan a un

plano único (plano del dibujo), mediante el giro de uno de ellos hasta su coincidencia con el plano del otro.

A los planos básicos de representación se les denominan comunmente planos de proyección de los cuales a uno se le llama plano vertical (ya que se supone ocupa previamente esta posición con respecto a la superficie terrestre), y al segundo plano horizontal (por los mismos motivos anteriores). A la intersección (recta) de ambos planos se la llama línea de tierra (línea horizontal). Si se supone que el plano que abatimos es el horizontal, el plano del dibujo será vertical (encerado), y por el contrario si el plano que gira es el vertical, el plano del dibujo será horizontal (mesa de dibujo). Las denominaciones anteriores son totalmente convencionales, ya que los planos de proyección sólo sirven como sistemas de referencia para el conocimiento de las posiciones relativas de puntos en el espacio y también para la del observador, pudiendo pues ocupar una posición cualquiera en el espacio e incluso ser móviles. No obstante simplifica mucho esta nomenclatura que tiene gran sentido en sus aplicaciones técnicas (dibujos industriales, arquitectónicos, etc.).

Los planos vertical y horizontal, (que se suponen indefinidos) dividen al espacio en cuatro regiones distintas llamadas cuadrantes, y para distinguirlos se numeran sucesivamente del 1º al 4º,

en el orden que se indica en la figura 7. El objeto a proyectar puede estar situado, en general, en cualquier cuadrante. Como en el sistema diédrico se opera exclusivamente con las proyecciones de las figuras, después de transportadas al plano del dibujo, el colocar el objeto en los cuadrantes 2°, 3° y 4° da lugar a que la representación resulte confusa por superponerse las proyecciones después de abatidas (cuadrantes 2° y 4°) o por su falta de visibilidad (cuadrante 3°). Por los motivos expuestos debe procurarse colocar las figuras exclusivamente en el primer cuadrante con lo cual sus proyecciones quedan netamente separadas por la línea de tierra (la vertical encima y la horizontal debajo) y son ambas visibles.

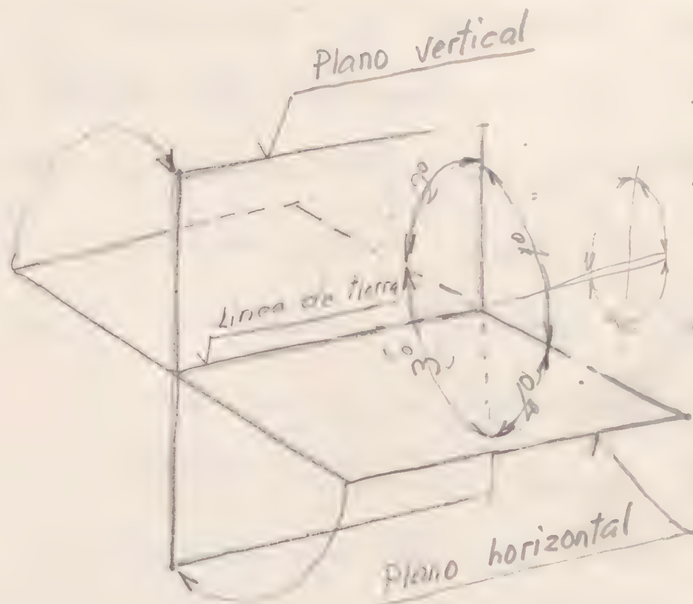


Figura 7

Esta limitación es de carácter exclusivamente práctico y a veces no es posible aplicarla totalmente en el estudio de las figuras, lo cual no presenta tampoco grandes inconvenientes, sino mayor atención y cuidado en el estudio de los puntos, rectas, etc. que que-

dan en todo caso perfectamente puntualizados con la nomenclatura y posición de sus puntos proyectados con respecto a la línea de tierra.

A veces es conveniente, para facilidad de interpretación, utilizar un tercer plano auxiliar de proyección, perpendicular a los anteriores, llamado plano de perfil que se abate a su vez por giro alrededor de su intersección con el plano vertical (también puede hacerse con el horizontal) hasta su coincidencia con el plano del dibujo (fig. 8).

Los tres planos de proyección (vertical, horizontal y de perfil) se consideran siempre indefinidos y forman en el espacio un triedro trirrectángulo que dividen al mismo en ocho regiones distintas llamadas octantes que se enumeran sucesivamente del 1° al 8°, en el orden que se indican en la figura 8.

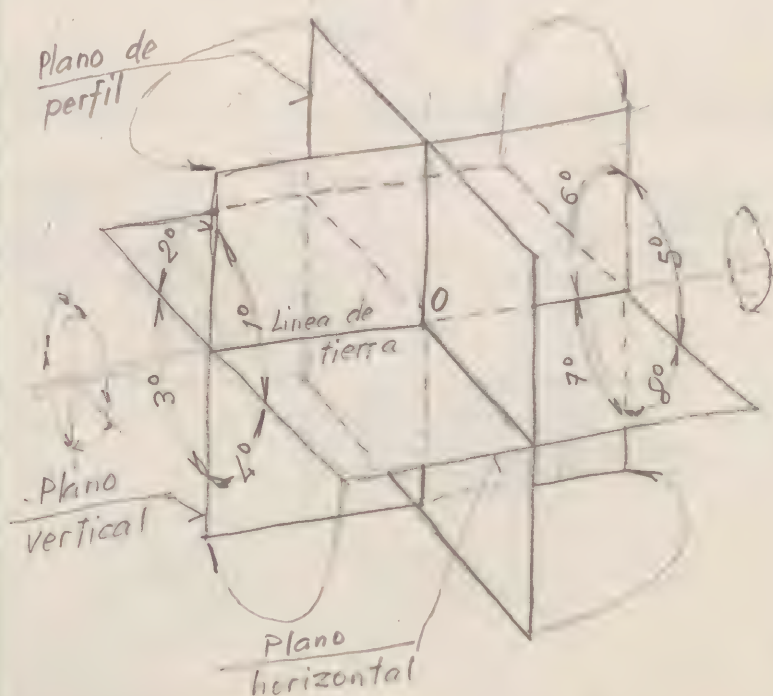


Figura 8

Cuando se utilizan los tres planos de proyección, debe colocarse preferentemente la figura en el espacio en el primer octante, para que la proyección vertical de la misma quede por encima de la línea de tierra, la horizontal debajo, y la

de perfil a la derecha de la vertical. Para conseguir esto basta colocar las dos rectas intersección (trazas) del plano de perfil con los vertical y horizontal (que después del abatimiento son coincidentes), a la derecha de la proyección vertical.

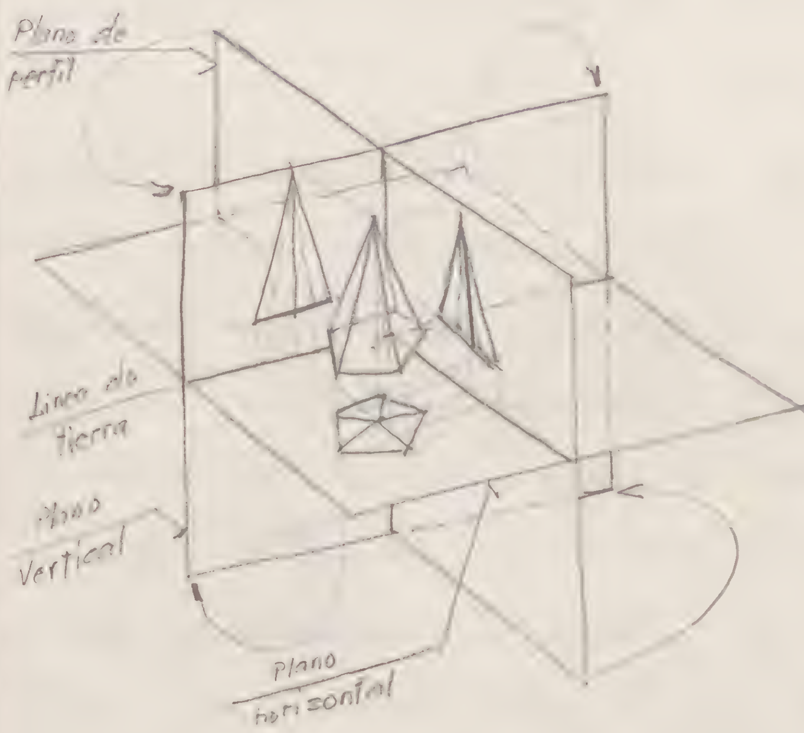


Figura 9

En la figura 9, adelantamos gráficamente los conceptos anteriores con una representación espacial en perspectiva axonométrica, en la que el objeto representado es una pirámide recta regular de base pentagonal, paralela ésta al plano horizontal. Dicha pirámide está situada en el primer octante.

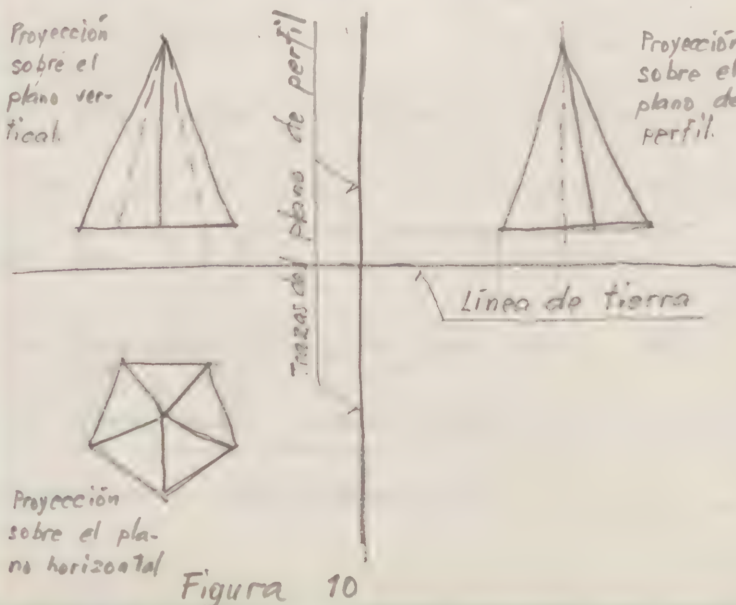
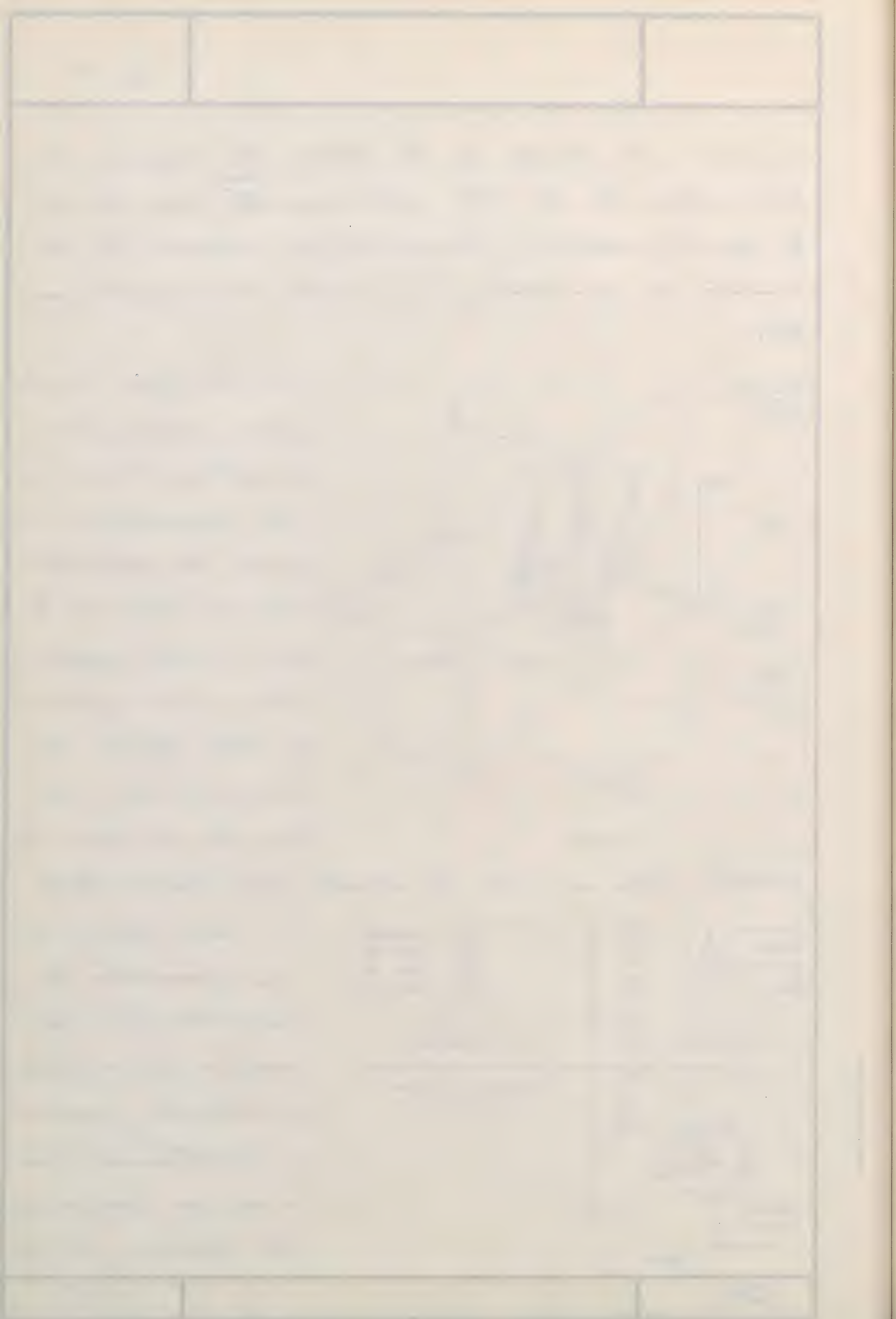


Figura 10

En la figura 10 están representadas las proyecciones de la pirámide en los tres planos de referencia y realizado el abatimiento, junto con sus proyecciones, del horizontal y de per-



fil sobre el plano del dibujo (el vertical), según se indica en la figura 9.

La nomenclatura más empleada en el sistema diédrico es la siguiente:

(Nomenclatura)

6.21 Para la designación de puntos aislados de una figura.

En la representación diédrica hay que distinguir claramente entre puntos de la figura en el espacio y proyecciones de estos puntos sobre los planos vertical, horizontal y algunas veces sobre el de perfil.

Los puntos en el espacio se designan con letras mayúsculas latinas (como en la Geometría métrica), y para las proyecciones se utiliza la misma letra mayúscula con una comilla, dos o tres, según que la proyección sea la horizontal, vertical o de perfil; así p.e. cuando se designe punto M, se refiere a un punto de una figura en el espacio; punto M' es la proyección de M sobre el plano horizontal; punto M'' es la proyección de M sobre el plano vertical, y punto M''' sobre el de perfil. También se utilizan cifras cuando los puntos de la figura son numerosos, y se sigue el mismo criterio para distinguir los puntos del espacio (5), de sus proyecciones (5', 5'', 5''').

Págs.

21 al 30

6.22 (Nomenclatura) para la designación de rectas o segmentos rectilíneos.

Si las rectas se consideran indefinidas, se designan con una letra minúscula latina (como en Geometría métrica) y para las proyecciones se utiliza la misma letra minúscula con una comilla, dos o tres, según que la proyección sea la horizontal, vertical o de perfil; así p. e. cuando se designe recta a se refiere a una recta perteneciente a una figura en el espacio; recta a' es la proyección de a sobre el plano horizontal; recta a'' es la proyección de a sobre el vertical, y recta a''' sobre el de perfil.

Si se considera tan sólo un segmento rectilíneo, se le designa, como en Geometría métrica, con las letras mayúsculas de sus extremos (en el espacio), y con una, dos o tres comillas en sus proyecciones. Así p. e. al hablar del segmento A''B'' se refiere a la proyección vertical del segmento AB en el espacio, cuyos extremos son los puntos A y B.

También pueden designarse segmentos rectilíneos por letras minúsculas latinas con sus comillas correspondientes, siempre que en la respectiva proyección estén debidamente acotados según normas del Dibujo técnico.

6.23 (Nomenclatura) para la designación de planos indefinidos o limitados por un contorno rectilíneo

Cuando se haga referencia al plano en el espacio, pueden utilizarse, como en la Geometría métrica, letras mayúsculas del alfabeto griego. Pero en proyecciones diédricas no puede representarse el plano por las proyecciones de sus puntos que son infinitos, sino por las de los elementos que lo determinan, que como sabemos son: 1) Tres puntos no alineados; 2) una recta y un punto exterior a ella, y 3) por dos rectas secantes o paralelas. La designación de los elementos que definen el plano por sus proyecciones es la indicada en los párrafos 6.21 y 6.22.- Así p. e. diremos plano a'D' - a"D" que interpretaremos como proyección horizontal y vertical de la recta a y del punto D, que determinan el plano en el espacio.

Es más frecuente el determinar un plano por las proyecciones de tres de sus puntos o de un contorno poligonal plano como son en general las caras límites de poliedros, y también el definirlo por dos rectas especiales del plano, llamadas trazas o intersecciones de dicho plano con los de proyección (ó dos rectas secantes o paralelas). Las trazas, o son paralelas, o secantes en un punto de la línea de tierra y tienen siempre una de sus proyecciones sobre dicha línea de tierra.

6.24 (Nomenclatura) para la designación de ángulos

Siguiendo el mismo criterio que en la Geometría métrica, los ángulos en el espacio se designan por un punto arbitrario en cada lado y su vértice (p.e. ángulo $\widehat{AOB}$) o por una letra griega minúscula (ángulo α)

En proyecciones basta con encomillar adecuadamente la correspondiente designación, y así diremos p.e. ángulo $\widehat{A''O''B''}$ que deberá interpretarse como proyección vertical del ángulo $\widehat{AOB}$ del espacio; o también ángulo $\widehat{\beta'''}$ o proyección de perfil del ángulo $\widehat{\beta}$ del espacio. En este último caso debe acotarse debidamente la amplitud del ángulo en sus proyecciones respectivas.

6.3 Nomenclatura de la Geometría analítica

La Geometría analítica, al igual que la Geometría métrica, se ocupa de las propiedades de las figuras geométricas (formas, dimensiones y situación de las mismas); dichas figuras geométricas pueden ser planas o espaciales, dando lugar a la división de la Geometría analítica en plana y del espacio. Se diferencia de la Geometría métrica en que no se vale tan sólo del Algebra elemental y de la Trigonometría, sino que por el contrario hace aplicación mucho más extensa del Algebra; las propiedades de las figuras geométricas y teoremas se deducen por cálculo algebraico pu-

UNE A4 210 X 297

ro, facilitando el análisis de curvas y superficies cuya investigación a base de construcciones elementales resulta muy penosa.

Los métodos empleados en la Geometría analítica fijan la posición de los puntos de la figura geométrica estudiada mediante ciertas magnitudes geométricas denominadas "coordenadas", y estableciendo ecuaciones entre las mismas se obtienen las propiedades de aquélla.

Las coordenadas son los elementos característicos operatorios de la Geometría analítica. Sirven fundamentalmente para determinar la situación, tanto en el plano como en el espacio, de los puntos de la figura. Dos sistemas de coordenadas diferentes se emplean indistintamente en la Geometría analítica, el de "coordenadas paralelas" o el de "coordenadas polares". En ambos sistemas la situación de un punto cualquiera en el plano o en el espacio se establece por referencia a un sistema de rectas que se suponen fijas, llamados "ejes coordenados". Los ejes coordenados son dos rectas secantes para las figuras planas y tres concurrentes y no coplanarias para las del espacio. El o los ángulos que forman los ejes coordenados pueden ser cualesquiera; en el caso particular y de más frecuente empleo de que sean rectos, las coordenadas paralelas se denominan "coordenadas cartesianas".

6.31 Nomenclatura de las coordenadas y ejes coordenados.

Resumiendo lo expresado anteriormente, los sistemas de coordenadas fundamentales son el de coordenadas paralelas y el de coordenadas polares, pudiendo ambos emplearse tanto en el plano como en el espacio. Como caso particular del sistema paralelo existe el sistema de coordenadas cartesianas. El fundamento y nomenclatura empleada en cada uno de ellos lo exponemos a continuación.

6.31 Sistema de coordenadas paralelas en el plano

Para fijar la situación de un punto en un plano por coordenadas paralelas, se fijan previamente en éste dos rectas secantes, llamadas ejes coordenados, que se cortan formando un ángulo ω cualquiera. El punto de intersección de los ejes coordenados se denomina origen del sistema de coordenadas.

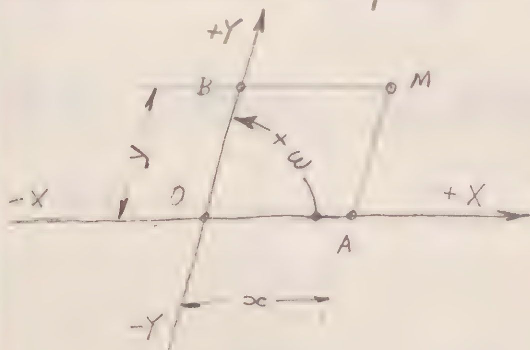


Figura 11

Si designamos los dos ejes por X e Y (fig. 11) podremos orientarlos debidamente dando a cada uno de ellos una dirección positiva desde el origen O hacia cierto lado, y negativa a la contraria. Proyectemos un punto M cualquiera del plano sobre el eje X mediante una paralela al Y, y sobre este último por una paralela al X.

Así obtendremos los puntos A y B, siendo la figura OAMB un paralelógramo. El segmento OA es la coordenada x correspondiente al punto M, y el OB es la coordenada y del mismo punto; de la figura se deduce que $OA = BM = x$, y $OB = AM = y$, siendo x e y las coordenadas paralelas del punto M. A las coordenadas x e y, se las llaman también abcisa y ordenada respectivamente del punto M.

Para la fijación del ángulo que forma el eje Y (u otra recta cualquiera) con respecto al eje X, se considera con orientación positiva el contrario al giro de las agujas de un reloj; así pues el ángulo ω (agudo u obtuso) que forman los semiejes positivos OX y OY será el positivo que se obtenga al girar OX alrededor de O hasta coincidir con OY, siendo el giro en sentido contrario al de las agujas de un reloj.

6.32 Sistema de coordenadas cartesianas en el plano

El sistema de coordenadas cartesianas en el plano puede considerarse como un caso particular del sistema de coordenadas paralelo, en el que el ángulo ω formado por los ejes coordenados, es recto ($\omega = \frac{\pi}{2}$).

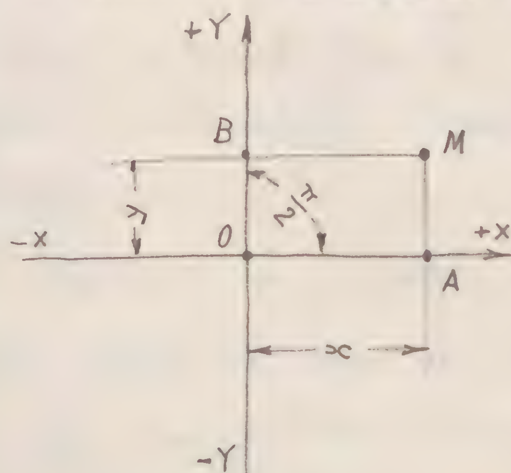


Figura 11

La nomenclatura y conceptos expuestos en el párrafo 6.32, se

conservan en este sistema (fig. 11). Las coordenadas cartesianas son más empleadas que las oblicuas ya que, en general, se simplifican los cálculos numéricos y ecuaciones algebraicas planteadas.

6.33 Sistema de coordenadas polares planas

En muchos casos se simplifican las fórmulas de la Geometría analítica y se facilitan los cálculos utilizando las coordenadas polares, que describimos a continuación.

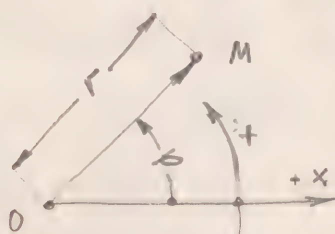


Figura 12

Imaginemos en el plano una semirrecta orientada OX de origen O. Cualquier punto M del plano queda perfectamente determinado cuando sea conocida la distancia r del mismo al origen O, y al mismo tiempo el ángulo φ que forma la dirección OM con el eje OX.

A la dirección fija OX se la llama eje polar; al origen o punto fijo O, polo; al ángulo φ, ángulo polar o también azimut y al segmento r, radio vector.

Azimut φ y radio vector r son las coordenadas polares del punto M que se indican M (φ, r). El ángulo φ puede ser positivo o negativo; el radio vector r es siempre positivo.

6.34 Sistema de coordenadas paralelas en el espacio

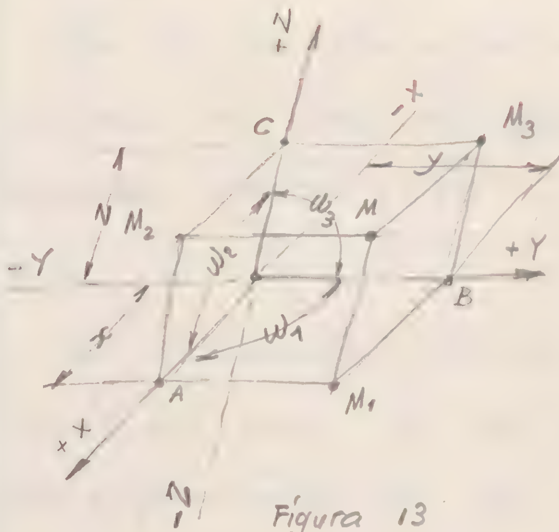


Figura 13

En lugar de los dos ejes coordenados empleados en la Geometría analítica plana (ver párrafo 6.31) se utilizan tres no coplanarios y concurrentes en un punto $\widehat{O}$; los ejes se designan por las letras $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z}$ (fig. 13) y forman entre sí ángulos $\widehat{\omega_1}, \widehat{\omega_2}$ y $\widehat{\omega_3}$ cualesquiera. Cada dos ejes forman un plano, por lo que el espacio quedará dividido por ellos en ocho regiones distintas y desiguales entre sí, llamados octantes. Los tres planos se llaman planos coordenados y se designan por las letras de los dos ejes que los forman; así tendremos los planos $\widehat{XY}, \widehat{YZ}$ y $\widehat{ZX}$.

Para fijar la posición de un punto cualquiera $\widehat{M}$ del espacio, lo proyectaremos sobre los tres ejes $\widehat{X, Y, Z}$, mediante planos paralelos a dos de dichos ejes. De esta forma el punto $\widehat{A}$ se obtendría como intersección con el eje $\widehat{X}$ del plano que pasando por $\widehat{M}$ es paralelo al plano $\widehat{YZ}$; el $\widehat{B}$ de la misma forma siendo el plano paralelo a $\widehat{ZX}$ y el $\widehat{C}$ paralelo al $\widehat{XY}$.

Los segmentos $\widehat{OA}, \widehat{OB}, \widehat{OC}$, son las coordenadas paralelas (oblicuas) del punto $\widehat{M}$, y se las designan

por las letras x, y, z, respectivamente.

Con los tres planos proyectantes se forman también las proyecciones M_1, M_2, M_3 del punto M sobre los tres planos coordenados XY, ZX e YZ respectivamente, verificándose que

$MM_1 = z$; $MM_2 = y$; $MM_3 = x$

Las coordenadas paralelas oblicuas se utilizan en muy limitados casos. Son de mucha más aplicación, por las simplificaciones a que dan lugar, las coordenadas cartesianas, que describimos a continuación.

6.35 Sistema de coordenadas cartesianas en el espacio

Al igual que el sistema cartesiano plano (ver párrafo 6.32), el del espacio puede considerarse como un caso particular del sistema de coordenadas paralelo (oblicuo), en el que los ángulos $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ son todos rectos (fig. 14).

Conservando la nomenclatura y conceptos expuestos en el anterior párrafo 6.34, podemos deducir lo siguiente:

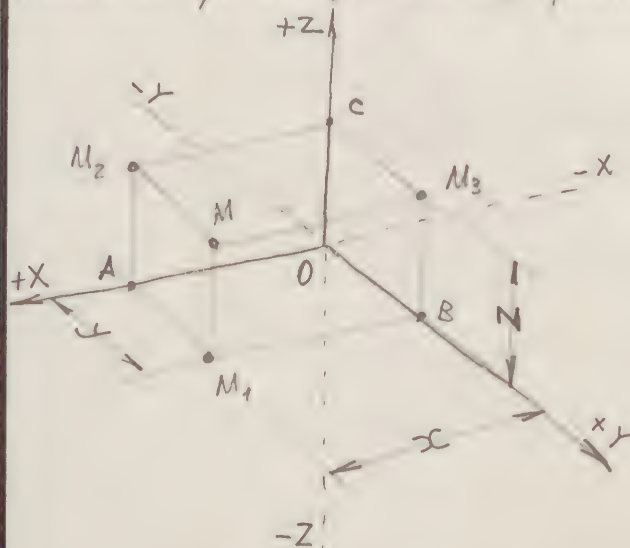
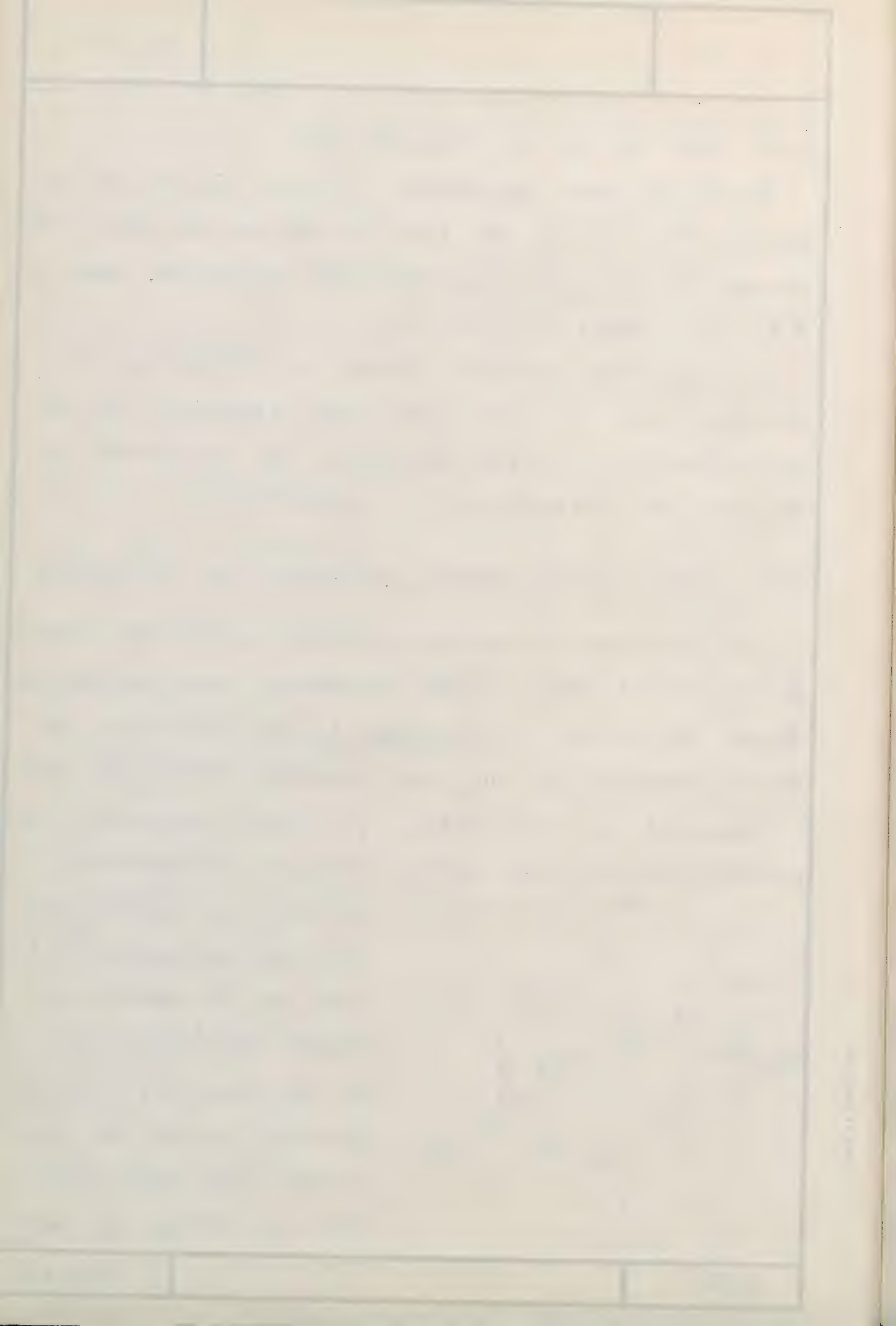


Figura 14

a) Los ejes coordenados X, Y, Z, de origen O, forman en el espacio un triedro trirrectángulo.

b) Los planos XY, YZ, ZX, formados por dos ejes, son mutuamente perpendiculares, y dividen al espa-



cio en ocho regiones distintas pero iguales entre sí, llamadas octantes.

c) Los planos proyectantes de M son perpendiculares a los ejes X, Y, Z y a los planos de proyección XY, YZ, ZX, por lo que las proyecciones M_1, M_2 y M_3 son ortogonales.

d) La distancia del punto M a un plano coordenado (p. e. XY) viene medida por la coordenada del tercer eje (Z); así pues se verifica que la distancia de M al plano XY es la coordenada z, ya que $MM_1 = OC = z$, e igualmente $MM_2 = OB = y$; $MM_3 = OA = x$.

6.36 Sistema de coordenadas polares en el espacio

La situación de un punto M del espacio con relación a tres ejes rectangulares puede definirse también por las siguientes magnitudes (fig. 15):

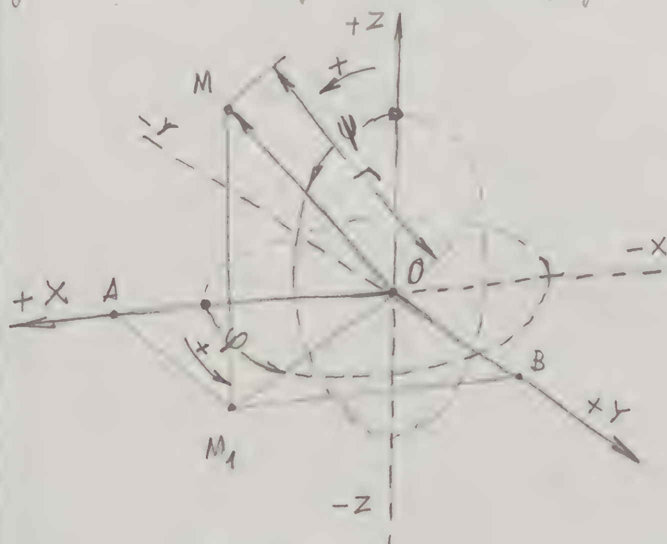


Figura 15

El radio vector OM o distancia r entre el punto M y el origen O; el ángulo ψ que forma este radio vector con el eje Z, y el ángulo φ que forma con el eje X la proyección OM_1 del radio vector OM sobre el plano XY.

Los tres valores φ, ψ y r se llaman las coordenadas

Págs.

31 al 40

polares del punto M, que se representa por M $(\varphi/\Psi/r)$.

O es el polo; OX el eje polar; OZ el eje del polo. φ y Ψ se miden en radianes y van afectados de signo cuyo sentido positivo se indica en la figura 15. Para determinar cualquier punto del espacio puede variar φ de 0 a 2π y Ψ tan sólo de 0 a π; el radio vector r es siempre positivo. (de O a M).

Las coordenadas polares sirven también para determinar puntos sobre la superficie de la tierra en cuyo caso se las llaman coordenadas geográficas. Como en este caso de aplicación se supone constante el radio de la tierra, sólo se necesitan dos ángulos, el horizontal o longitud y el vertical o colatitud (suele tomarse en lugar de éste el complemento llamado latitud o distancia al ecuador). Las longitudes se refieren a un meridiano fijo (meridiano de Greenwich).

7. Estudio comparativo de los métodos empleados en la representación de figuras geométricas espaciales y de objetos objetos físicos de carácter técnico-industrial

7-1 Representación en la Geometría métrico-proyectiva

Según hemos indicado en el párrafo 2, la Geometría métrico-proyectiva estudia las propiedades métricas y gráficas de las figuras geométricas planas y espaciales. Para estas últimas se vale exclusivamente de la representación en perspectiva axonométrica de dichas figuras, método adecua-

do a dicho estudio, ya que con la perspectiva suele adquirirse con rapidez y claridad el concepto de la forma que tiene en el espacio la figura que se estudia.

Las relaciones métricas se deducen siempre de forma analítica mediante razonamientos y cálculos algébricos elementales. La figura de representación es simplemente un elemento auxiliar que facilita y guía el razonamiento y cálculo respectivo.

No debe olvidarse que la perspectiva axonométrica es uno de los varios métodos de representación de figuras espaciales que, mediante construcciones geométricas adecuadas permite obtener gráficamente verdaderas magnitudes lineales o angulares, siempre que se incluyan, juntamente con la perspectiva del objeto, la de sus proyecciones sobre un triedro trirrectángulo. No obstante esta posibilidad, la Geometría métrico-proyectiva no hace uso de ella y se limita tan solo a utilizar dicha perspectiva como medio de expresión gráfica, tratando de suplir con el razonamiento las posibles dificultades que suelen surgir por las deformaciones lineales o angulares que presenta este sistema de representación.

En resumen, la Geometría métrico-proyectiva opera en el estudio de propiedades de figuras geométricas espaciales, con una representación gráfica en perspec-

tiva destinada exclusivamente a aclaración de sus formas, y deduce de ella mediante razonamientos geométricos apropidos, las propiedades de posición o de magnitud de las mismas.

7.2 Representación en el sistema diédrico

El sistema diédrico de representación de figuras geométricas espaciales o de cuerpos físicos, opera exclusivamente con las proyecciones ortogonales de los puntos, aristas, ejes, etc. de las superficies de contorno de dichos cuerpos y figuras sobre dos planos de proyección perpendiculares entre sí. En casos especiales puede utilizarse también un tercer plano de proyección perpendicular a los anteriores. Es un sistema de representación fundamentalmente gráfico.

7.3 Representación en la Geometría analítica

La Geometría analítica estudia las relaciones geométricas y teoremas de las figuras del espacio, haciendo uso exclusivamente del cálculo algebraico puro, y estableciendo relaciones analíticas entre las coordenadas que determinan las posiciones de sus puntos con respecto a elementos fijos en el espacio (ejes coordenados).

Para facilitar el razonamiento analítico utiliza, al igual que la Geometría métrica, la representación en perspectiva axonométrica de sus figuras, con las mismas limitaciones expuestas en el párrafo 7.1

El sistema de coordenadas cartesianas en el espacio toma como ejes coordenados, tres rectas orientadas que forman las aristas de un triedro birrectángulo. Estos ejes determinan dos a dos, tres planos coordenados equivalentes a los tres empleados en el sistema diédrico (vertical, horizontal y perfil).

7.4 Representación en el Dibujo técnico

El dibujo técnico utiliza como medio de expresión más adecuado, el sistema de vistas en distintas direcciones del objeto a representar. En esencia la vista de un objeto en una dirección determinada, en el que el observador se supone suficientemente alejado de la pieza para que las distintas visuales sean sensiblemente paralelas (teóricamente es una proyección paralela con punto de vista en el infinito), no es más que la proyección ortogonal de dicho objeto sobre un plano perpendicular a la dirección de la visual y situado detrás del mismo.

El criterio de economía en el tiempo de ejecución de un dibujo técnico, sin perjuicio de la claridad, admite un número variable en las direcciones de la visual y número de vistas a representar que oscilan de una como mínimo a seis como máximo. Las vistas de un dibujo están normalizadas tanto en sus direcciones como en sus posiciones relativas en dicho dibujo.

Las direcciones normalizadas son las seis posibles perpendiculares a las caras de un cubo (fig. 16), en cuyo interior se supone colocado el objeto a representar en su posición de empleo (vertical, horizontal o inclinado).

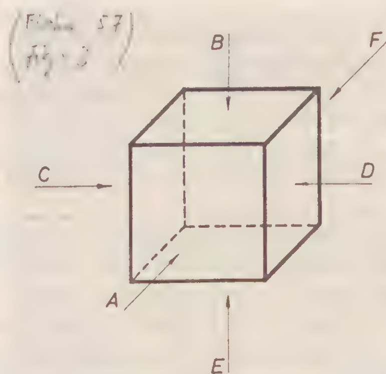


Figura 16

Los nombres técnicos que reciben estas vistas están dados de acuerdo con la dirección de la visual o posición relativa del observador con respecto al objeto.

Tomando p.e. como objeto de representación el de la figura 17, dichas vistas se denominan de la siguiente manera:

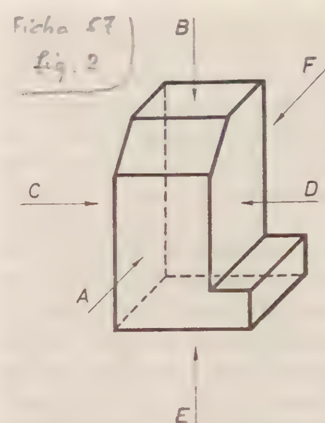


Figura 17

A) <u>Vista anterior</u> o <u>principal</u> (el observador se sitúa delante del objeto)

B) <u>Vista superior</u> (el observador, encima de la principal)

C) <u>Vista lateral izquierda</u> (el observador, a la izquierda)

D) <u>Vista lateral derecha</u> (el observador, a la derecha)

E) <u>Vista inferior</u> (el observador, debajo)

F) <u>Vista posterior</u> (el observador, detrás).

La colocación de estas vistas en el plano del dibujo no es arbitraria, sino que por el contrario, está normalizada.

Existen dos sistemas esencialmente distintos, denomi-

nados respectivamente Sistema europeo y Sistema americano. En ambos se elige previamente la dirección de la vista anterior que se considera como básica para la colocación de las restantes vistas, de forma tal que estando situado el objeto en su posición de empleo, se obtenga una representación lo más clara posible; por esta razón, a dicha vista inicial de libre elección, se la denomina también vista principal. Fijada la vista principal, las restantes vistas tienen una posición determinada en el dibujo, con respecto a aquélla.

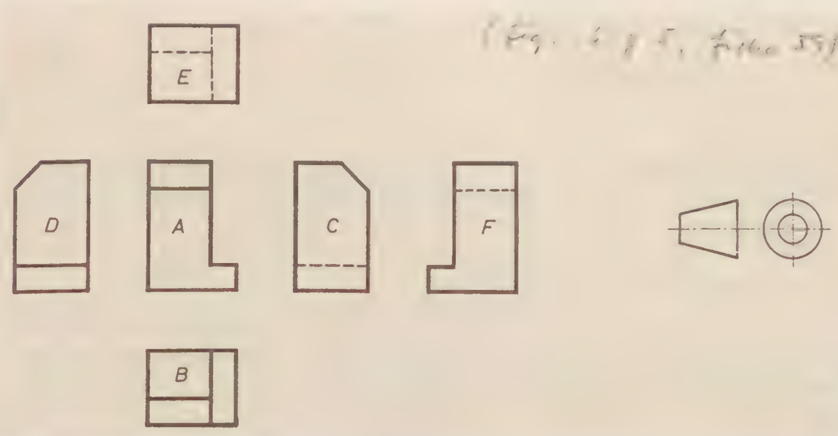


Figura 18

En el sistema europeo, se colocan las vistas en la posición que se indica en la figura 18 la cual se corresponde con la pieza y direcciones dadas en la figura 17. El símbolo distintivo de este sistema es el dibujado a la derecha de la figura.

La dirección y colocación de las mismas vistas en el sistema americano se indican en la

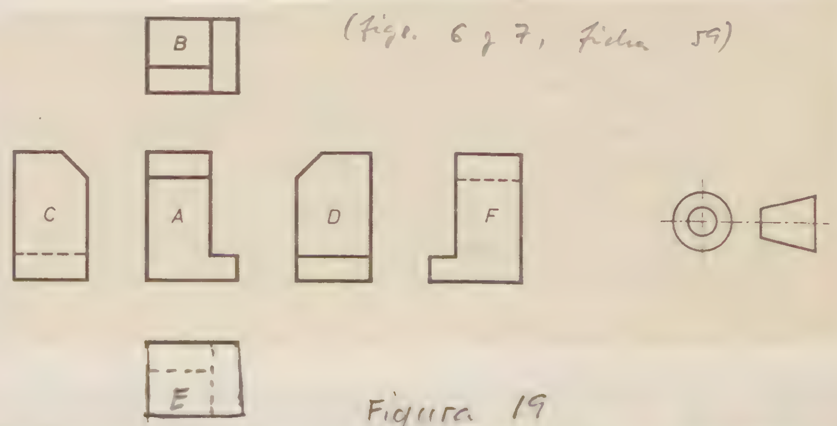


Figura 19

figura 19, cuyo símbolo distintivo aparece también a la derecha de la misma.

Como puede observarse comparando las figuras 18 y 19, la colocación en ambos sistemas de las vistas $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ y $\widehat{E}$ con respecto a la principal $\widehat{A}$ es totalmente opuesta, lo cual obliga a un notable esfuerzo mental al pasar de un sistema a otro. En nuestro estudio aplicaremos exclusivamente el sistema europeo que es el empleado en España. Aprovechamos la ocasión para indicar que el sistema diédrico de proyecciones en los países anglosajones sigue las mismas directrices de representación que el sistema americano de dibujo técnico.

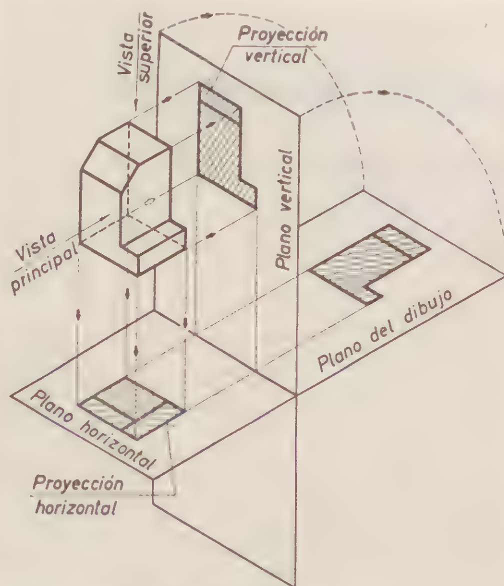


Figura 20

La vista principal o anterior del sistema europeo, equivale en el sistema diédrico a la proyección vertical (fig. 20); análogamente, la superior es equivalente a la horizontal. Si se necesitase una nueva vista en la dirección lateral izquierda, ésta sería equivalente a la vista de perfil en el diédrico.

En el dibujo técnico los cuerpos se suponen siempre situados en el primer diedro, por lo que la vista superior aparece situada siempre debajo de la prin-

cipal y la lateral izquierda a la derecha de la misma. Ello establece una clara correspondencia entre el sistema diédrico y el dibujo técnico.

Tanto en la representación diédrica como en el dibujo técnico son necesarias, al menos, dos proyecciones o vistas para poder determinar con precisión las figuras espaciales o cuerpos físicos. No obstante el dibujo técnico, consigue en casos especiales, la representación correcta de un objeto con una sola vista, supliendo con indicaciones escritas (consignación de un espesor constante), o con símbolos adecuados (signos de cuadrado, diámetro, cruz de San Andrés, etc) la supresión de una de ellas.

Son corrientes en el dibujo técnico las representaciones en dos vistas (principal y superior, o principal y lateral izquierda); más frecuente aún es el empleo de tres vistas (principal, superior y lateral izquierda), pues de esta forma se obtiene imaginariamente con claridad y rapidez, las nociones de forma y dimensiones del objeto representado. Los casos de representación de objetos con más de tres vistas son excepcionales en el dibujo técnico y sólo se utilizan en piezas complicadas. Por el contrario son frecuentes las representaciones en cortes o secciones en piezas que presentan interiores huecos más o menos complicados; el número de cortes o secciones no está limitado y se eligen los necesarios según criterios de

UNE A4 210 X 297

claridad y exactitud.

Dado el carácter práctico del sistema de representación del dibujo técnico, en oposición al teórico del sistema diédrico, no tiene importancia en el primero la posición relativa del objeto con respecto a los planos de proyección (vertical, horizontal y de perfil en el sistema diédrico), por lo que se prescinde en el dibujo técnico de la representación de la línea de tierra y de las trazas del plano de perfil (ejes coordenados de la Geometría analítica), tan necesarios para la situación de puntos por sus respectivas coordenadas en la solución de problemas geométricos espaciales. De todas formas siempre se pueden situar dichos ejes (si fuese necesario) después de colocadas arbitrariamente las vistas del objeto en el plano.

8. Nomenclatura adoptada en vista a una coordinación de la empleada en la Geometría métrico-proyectiva, la Geometría descriptiva en su sistema diédrico, la Geometría analítica y el Dibujo técnico, referentes todas a figuras espaciales.

En el estudio que hacemos a continuación, proponemos una nomenclatura común que tiene posibles aplicaciones a los distintos casos que a continuación exponemos.

8.1 Casos de aplicación de la nomenclatura propuesta

[illegible]

A) En figuras en perspectiva axonométrica empleadas como medios gráficos de expresión en la Geometría métrico-descriptiva.

B) En figuras en perspectiva axonométrica empleadas como medios gráficos de expresión en la Geometría analítica.

C) En figuras en proyecciones diédricas empleadas como medios gráficos de expresión en la Geometría analítica.

D) En figuras en proyecciones del Sistema diédrico.

E) En la representación por medio de vistas y cortes en el Dibujo técnico.

F) Como forma abreviada de expresión en libros e impresos técnicos. (ampliar espacio)

8.2 Nomenclatura conjunta para figuras del espacio y en proyección.

8.21 Nomenclatura para el "Punto origen de coordenadas"

En dibujos se designa con la cifra cero.

En impresos se expresa: Origen O.

Se aplica en los casos B), C), D), F) (ver párrafo 8.1).

No se aplica en los casos A), E) ← (ver párrafo 8.1).

8.22 Nomenclatura para los "Ejes coordenados"

En dibujos se designan con las letras mayúsculas latinas +X, +Y, +Z.

En impresos se expresan:

1) En general Eje X, Eje Y, Eje Z.

Págs.

41 al 50

2) En particular, si fuese necesario puntualizar el sentido:

Eje +X Eje −X	Eje +Y Eje −Y	Eje +Z Eje −Z

Se aplica en los casos B), C), D), F) (ver párrafo 8.1).

No se aplica en los casos A), E) ← (ver párrafo 8.1).

8.23 Nomenclatura para los "Planos coordenados"

En dibujos se designan con los siguientes números romanos:

1) El formado por los ejes Z y X, el número I
2) El formado por los ejes X e Y, el número II
3) El formado por los ejes Y y Z, el número III

En impresos se expresan: Plano I, Plano II, Plano III o si se quiere mas precisión: Plano coordenado I, etc.

Se aplica en los casos B), C), D) F). (ver párrafo 8.1).

No se aplica en los casos A), E) ← (ver párrafo 8.1).

8.24 Nomenclatura para un "Punto en el espacio"

En dibujos se designa con una cifra, excepto el cero

En impresos se expresa p. e.: Punto 12.

Se aplica en los casos A), B) F). (ver párrafo 8.1).

No se aplica en los casos C), D), E). (ver párrafo 8.1).

UNE A4 210 X 297

8.25 Nomenclatura para una "Recta en el espacio"

1) Recta indefinida

En dibujos se designa con una letra minúscula latina, exceptuando las x, y, z.

En impresos se expresa p. e. Recta m

Se aplica en los casos A), B), F) (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos C), D), E) (ver párrafo 8.1).

2) Segmento rectilíneo definido por sus puntos extremos.

En dibujos se designan adecuadamente las cifras de sus puntos extremos: p. e. 8 y 15

En impresos se expresa p. e. Segmento 8·15, y si se quiere mayor precisión, Segmento rectilíneo 8·15.

Se aplica en los casos A), B), F) (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos C), D), E) (ver párrafo 8.1).

3) Segmento rectilíneo acotado

En dibujos se designa con una letra minúscula latina (como 1), exceptuando las x, y, z. y se acota, según normas del Dibujo técnico, con línea de cota, flechas y, si fuese necesario, con líneas de referencia.

En impresos se expresa p. e. : Segmento h.

Se aplica en los casos A), B), C), D) E) F) (ver párrafo 8.1).

Observación.- En el Dibujo técnico se emplea casi exclusivamente la acotación de segmentos rectilíneos (dimensiones longitudinales de los objetos representados) mediante cotas, flechas, líneas de referencia si ha lugar, y cifras de cota; estas últimas expresan la medida de la longitud real del segmento de acuerdo con la unidad adoptada.

8.26 Nomenclatura para un "Plano en el espacio".

En dibujos se designa el plano por una letra mayúscula latina, exceptuando las X, Y, Z.

En impresos se expresa p. e. Plano R.

Se aplica en los casos A), B), F). (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos C), D), E) (ver párrafo 8.1).

8.26 Nomenclatura para las "Coordenadas cartesianas".

En dibujos se designan con las letras minúsculas latinas x, y, z. No es frecuente la representación gráfica de las coordenadas cartesianas de los puntos de la figura, y sólo se emplea en casos excepcionales para destacar la posición de un punto notable; cuando esto suceda, las coordenadas se representan como segmentos acotados, bien

con sus letras respectivas o con sus dimensiones reales fijadas con cifras de acuerdo con la unidad adoptada.

En impresos se expresan: Coordenada x, Coordenada y, o Coordenada z, o tambien simplemente Coordenadas x, y, z. Pueden sustituirse las letras anteriores por sus valores numéricos.

Se aplican en los casos B), C), D) F) (ver párrafo 8.1).
No se aplican en los casos A), E) (ver párrafo 8.1).

8.3 Nomenclatura especial para figuras en proyección

En el Sistema diédrico, en el Dibujo técnico y excepcionalmente en la Geometría analítica, se opera exclusivamente con las proyecciones de figuras espaciales sobre dos o tres planos de proyección. Esto precisa establecer una nomenclatura que permita distinguir claramente las distintas proyecciones de los elementos de la figura estudiada (puntos, rectas, ángulos, etc.). La nomenclatura adoptada tiene muy en cuenta estas condiciones y permite localizar independientemente dichas proyecciones efectuadas sobre los dos o tres planos coordenados.

No obstante, cuando el objeto o figura a representar se suponga colocado en el primer cuadrante (si se emplean dos planos coordenados), o en el primer octante

[illegible]

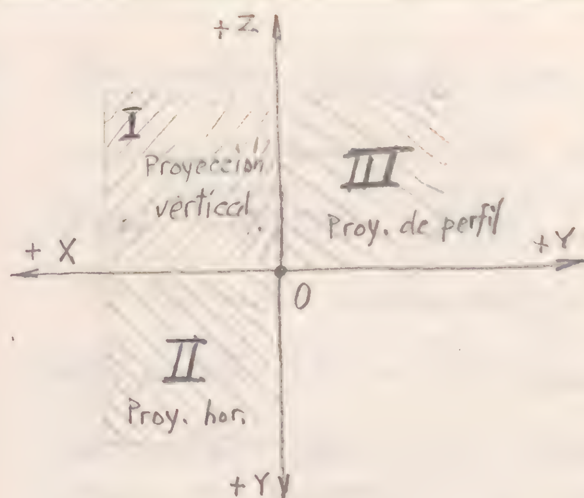


Figura 21

(si son tres los planos coordenados), las proyecciones de la figura quedan netamente diferenciadas en zonas fijas e independientes del plano del dibujo (fig. 21), lo cual permite una fácil localización de las mismas debido a su especial disposición.

Por los motivos expuestos, consideramos posición normal de la figura, y de más frecuente empleo, la indicada anteriormente (primer cuadrante o primer octante) y como excepcionales las restantes posiciones (2° a 4° cuadrantes, o 2° a 8° octantes). Bajo este punto de vista y con el criterio de economía en el tiempo de ejecución, adoptamos una nomenclatura simplificada para el caso normal y otra más especificada para los restantes casos más generales pero de menor aplicación. Las simplificaciones de la nomenclatura normal se derivan de la específica general.

8.31 Nomenclatura para un "Punto en proyecciones"

En dibujo se designa:

a) En posición normal, con una misma cifra en sus dos o tres proyecciones que se corresponden debidamente por sus líneas de referencia perpendiculares a los ejes

UNE A4 210 X 297



b) En posición general, con una misma cifra precedida del número romano del plano sobre el que se proyecta; p. e. I (23), II (23), III (23).

Con esta nomenclatura se especifican las proyecciones del punto 23 (en el espacio) sobre el plano vertical (I), horizontal (II) o de perfil (III). Cuando son sólo dos los planos de proyección, se prescinde de la última.

En impresos se expresa siempre igual que b).

Se aplica en los casos C), D) F) y excepcionalmente en E) (ver párrafo 8.1)

No se aplica en A), B) y tampoco, en general, en E) (ver párrafo 8.1).

8.32 Nomenclatura para una "Recta en proyecciones"

1) Recta indefinida

En los dibujos se designa:

a) En posición normal, con una misma letra minúscula latina, exceptuando las x, y, z, en sus dos o tres proyecciones.

b) En posición general, con una misma letra minúscula latina, exceptuando las x, y, z, precedida del número romano del plano sobre el que se proyecta: p. e. I (c), II (c), III (c).

En impresos se expresa siempre igual que b).
Se aplica en los caso C), D) F) (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos A), B), E), (ver párrafo 8.1)

2) Segmento rectilíneo definido por sus puntos extremos.

En dibujo, se designa:

a) En posición normal, con una misma cifra en las tres proyecciones de un extremo, y otra distinta en las tres proyecciones del otro: p. e. 7 • 11

b) En posición general, igual a la anterior precedida del número romano del plano sobre el que se proyecta.
En el ejemplo anterior, el punto 7 del segmento 7•11 en el espacio, se designará en el dibujo por I (7), II (7) y III (7) según la proyección, e igual para el punto 11.

En impreso se expresa: Segmento I (7•11), Segmento II (7•11), y Segmento III (7•11), según (se trate de) la proyección vertical, horizontal o de perfil respectivamente.
Se aplica en los casos C), D), F) (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos A), B), E) (ver párrafo 8.1).

3) Segmento rectilíneo acotado

En dibujo, se designa:

a) En posición normal, con una misma letra minúscula latina (como 1), exceptuando las x, y, z, en sus dos o tres proyecciones. Al mismo tiempo se acota, según normas del Dibujo técnico, con línea de cota, flechas y, si fuese necesario, con líneas de referencia.

b) En posición general, igual que la anterior, precedida del número romano del plano sobre el que se proyecta:

UNE A4 210 X 297

p. e. I (m), II (m), III (m).

En impresos se expresa siempre igual que b).

Se aplica en los casos C), D), F) — (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos A), B), E) (ver párrafo 8.1).

Observación.- En el Dibujo técnico se emplea casi exclusivamente la acotación de segmentos rectilíneos por medio de cifras que expresan la medida de la longitud real del segmento de acuerdo con la unidad adoptada.

8.33 Nomenclatura para un "Plano en proyecciones"

Ante la imposibilidad material de representar el plano por las proyecciones de todos sus infinitos puntos, se establece la posición de un plano cualquiera mediante las proyecciones de los elementos que determinan dicho plano en el espacio, que según hemos indicado anteriormente (ver párrafo 6.13) son los siguientes: 1) Tres puntos no alineados, 2) dos rectas secantes o paralelas, y 3) Una recta y un punto exterior a ella. Como estos elementos son puntos o rectas, y ya hemos establecido anteriormente la designación de ellos en los dibujos, sigue conservándose la misma para la del plano que determinan.

En el lenguaje oral se expresa p. e. Plano G que pasa por los puntos 8 • 15 • 16, o por las rectas a • f o por la recta m y el punto 11.

En impresos se expresa p. e. G (8 • 15 • 16), G (a • f) ó

G (m • 11) para el plano en el espacio, y en proyecciones II. G(8 • 15 • 16) que se leerá proyección horizontal del plano G que pasa por los puntos 8, 15 y 16 del espacio; si no es necesario puede suprimirse la le letra característica G.

Análogamente emplearemos III. G (a • f) para dos rectas secantes (o paralelas) (más simple también III (a • f), y I. G (m•11) (o I. (m-11), para recta y punto

Se aplica en los casos C), D), F) (ver párrafo 8.1)
No se aplica en los casos A), B), E) (ver párrafo 8.1).

8.34 Nomenclatura para las "Trazas de una recta"

Recordemos que se denomina traza de una recta en el espacio al punto de intersección de la misma con uno de los planos de proyección.

La determinación de las trazas de una recta permite resolver numerosos problemas del espacio, y ocupa un lugar destacado en el lenguaje y aplicación del Sistema diédrico de representación.

Si se emplean dos planos coordenados, las trazas de una recta pueden ser: Dos (recta oblicua a los dos planos coordenados); Una (recta paralela a uno y no paralela al otro); Ninguna (recta paralela a los dos).

Si se emplean tres planos coordenados, las trazas de una recta cualquiera pueden ser: Tres (recta oblicua a los

[illegible]

tres planos coordenados); Dos (paralela a uno de los planos y oblicua a los otros dos); Una (paralela a dos planos).

Las trazas de una recta cualquiera se consideran en muchos casos como puntos notables del trazado. Pueden designarse en general con una cifra cualquiera; a ser posible deben reservarse preferentemente la cifra 1, para la traza vertical; la 2 para la horizontal, y la 3 para la de perfil. En sus proyecciones se sigue el criterio general de designación de puntos (ver párrafo 8.31).

En impresos puede puntualizarse más haciendo referencia a la recta que produce las trazas, y así p.e. escribiremos II (1·d) que representa la proyección horizontal (II) de la traza vertical (1) de la recta d, o también II (1·(6·7)) cuando la recta esté designada por dos de sus puntos (6 y 7).

Se aplica en los casos C), D, F) (ver párrafo 8.1)
No se aplica en los casos A), B), E (ver párrafo 8.1)

8.35 Nomenclatura para las "Trazas del plano"

Se denomina traza de un plano en el espacio a la recta intersección de dicho plano con uno de los planos de proyección.

Las trazas del plano, al igual que las de las rectas, permiten permite resolver numerosos problemas del espacio en el sistema diédrico y sirven con mucha frecuencia para fijar la posición del plano con respecto a los coordenados.

Si se emplean dos planos coordenados, las trazas de

Págs.

51 al 60

un plano pueden ser: Dos rectas que se cortan en la línea de tierra, o paralelas a ésta (plano oblicuo a los dos de proyección); Dos rectas que se cortan en la línea de tierra perpendiculares a ésta (plano perpendicular a los dos); Una recta paralela a la línea de tierra (plano paralelo a uno de ellos); La misma línea de tierra (plano que pase por ella)

Si se emplean tres planos coordenados, las trazas de un plano pueden ser: Tres rectas secantes dos a dos (plano oblicuo a los tres de proyección; Dos rectas paralelas a uno de los ejes coordenados y una tercera perpendicular a ambas (plano oblicuo a dos de los de proyección y perpendicular al tercero); Dos rectas secantes perpendiculares a uno de los ejes (plano paralelo al formado por los otros dos); Uno de los ejes coordenados y otra recta perpendicular a éste (plano que pase por dicho eje).

Las trazas de un plano cualquiera se consideran en muchos casos como rectas notables del trazado. Pueden designarse en general con una letra minúscula latina cualquiera; a ser posible deben reservarse preferentemente la letra ā para la traza vertical; la b̄ para la horizontal, y la c̄ para la de perfil. En sus proyecciones se sigue el criterio general de designación de rectas indefinidas (ver párrafo 8.32).

En impresa puede puntualizarse más haciendo referencia al plano que produce las trazas, y así p. e. es-

UNE A4 210 X 297

cribiremos II (a - M) que representa la proyección horizontal (II) de la traza vertical (a) del plano M, o también II (a - (4-5-6)) cuando el plano sea el que pase por los tres puntos 4, 5 y 6.

Se aplica en los casos C), D), F) (ver párrafo 8.1)

No se aplica en los casos A), B), E) (ver párrafo 8.1).

8.36 Nomenclatura para un "Angulo en proyecciones"

En dibujos en proyecciones se emplea casi exclusivamente la designación de un ángulo mediante un arco acotado (con flechas) y una letra minúscula griega, que se repite en las dos o tres proyecciones, sin indicación expresa del plano sobre el que se proyecta (posición normal) o precedida del número romano correspondiente (posición general). Así consignaremos p. e. II (β), que representa la proyección horizontal del ángulo β.

En impresos se expresa de forma más general II (β), II (ab), II (AOB), según que el ángulo esté acotado (β), definido por dos rectas (ab), o por un punto en cada recta y el vértice (AOB), de acuerdo con la designación dada en el párrafo 6.14.

Se emplea en los casos C), D), F) (ver párrafo 8.1)

No se emplea en los casos A), B), E) (ver párrafo 8.1)

UNE A4 210 X 297

POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

Capítulo II

Estudio conjunto del cálculo analítico de las principales magnitudes de los poliedros regulares convexos, de su representación gráfica directa en el Sistema diédrico y de su representación gráfico-analítica como aplicación del cálculo analítico

9. Generalidades

Recordemos las siguientes definiciones estudiadas en la Geometría.

Se da el nombre de poliedro en general, a un sólido o cuerpo geométrico limitado por un conjunto finito de polígonos planos tales que cada uno de los lados pertenezca a dos de dichos polígonos, y que dos polígonos cualesquiera que tengan un lado común no pertenezcan al mismo plano.

Los polígonos del conjunto se llaman caras del poliedro, los lados y vértices de sus caras, se llaman aristas y vértices del poliedro y los ángulos internos de las caras, ángulos planos del mismo. Los planos de dos caras contiguas forman un ángulo diedro que recibe el nombre de diedro del poliedro

En cada vértice del poliedro concurren varias aristas y



caras del mismo, formando su conjunto una figura geométrica denominada ángulo sólido del poliedro.

Diagonales de un poliedro son rectas que unen dos vértices no situados en la misma cara, y plano diagonal el que pasa por un vértice y una arista, o por dos aristas, sin que en ambos casos estos elementos pertenezcan a una misma cara.

Un poliedro se llama convexo si al prolongar cualquiera de sus caras queda todo él en la misma región del espacio en que queda dividido por el plano de dicha cara.

Finalmente, un poliedro se llama regular, cuando todas sus caras son polígonos regulares iguales. lo que implica la igualdad de sus aristas y ángulos sólidos del mismo.

Las definiciones anteriores limitan la existencia de poliedros regulares convexos al número de cinco, ya que solo puede existir un ángulo sólido siempre y cuando la suma de los ángulos de las caras que lo forman sea menor que cuatro rectos,

Esta condición solo la cumplen:

1) Tres triángulos equiláteros.- Tetraedro regular
2) Cuatro triángulos equiláteros.- Octaedro regular
3) Cinco triángulos equiláteros.- Icosaedro regular
4) Tres cuadrados.- Exaedro regular o cubo

5) Tres pentágonos regulares.- Icosaedro regular.

9.1 Deducción de fórmulas generales a aplicar en el cálculo de magnitudes fundamentales comunes a los cinco poliedros regulares.

Consideremos como dato único y básico, para el cálculo de magnitudes lineales en los cinco poliedros regulares, la longitud ℓ_n de la arista de cada poliedro.

Las fórmulas generales que vamos a deducir en función de la arista $\widehat{\ell}$ del poliedro, se refieren a las siguientes magnitudes:

1) Radio $\widehat{a}$ de la esfera circunscrita (r^n_{ec}) (r_1)

2) Radio $\widehat{b}$ de la esfera tangente a las aristas r^n_{et} (r_3)

3) Radio $\widehat{c}$ de la esfera inscrita (r^n_{ei}) (r_2)

4) Ángulo 2φ del diedro formado por dos caras contiguas.

En dichas fórmulas intervienen particularmente para cada poliedro, las siguientes magnitudes:

5) Radio $\widehat{d}$ de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara r^n_{cc} (r_4)

6) Radio $\widehat{m}$ de la circunferencia circunscrita al polígono regular obtenido al unir los extremos de las aristas concurrentes en un vértice. r_{cm} (r_5)

Para el cálculo de estos elementos consideremos un

ángulo sólido de cualquier poliedro regular, en cuyo vértice concurrirán tantas aristas como caras lo formen, pudiendo ser éstas tan sólo triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares.

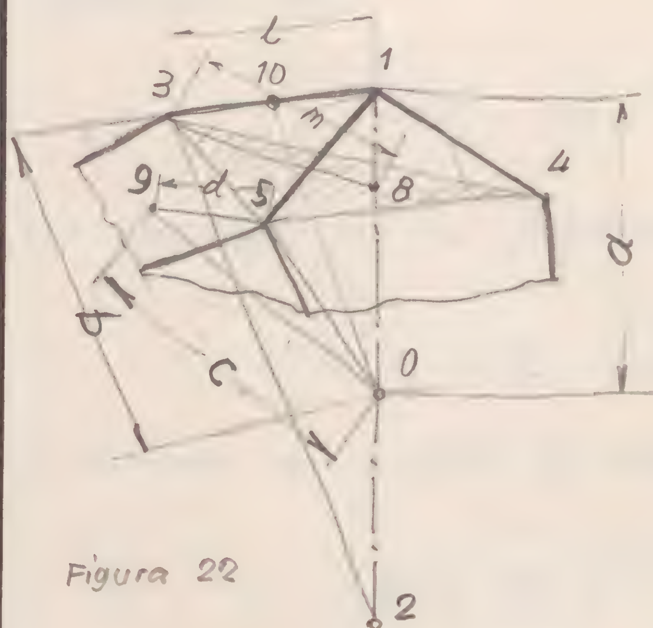


Figura 22

Sea (fig. 22) $\widehat{1}$ el vértice de dicho ángulo sólido, y $\overline{3, 4, \ldots}$ los vértices contiguos, que formarán un polígono regular de tantos lados como sean las caras concurrentes (tres, cuatro o cinco). La pirámide $\overline{1-3\cdot 4\cdot 5\ldots}$ será pues regular, y su altura $\overline{1\cdot 8}$ pasará por el centro $\overline{0}$ de la esfera circunscrita.

Consideremos también el punto 9, centro de una cara, y el $\overline{10}$, centro de una arista.

En la figura se acotan los segmentos

$(0\cdot 1) = a \quad (0\cdot 10) = b \quad (0\cdot 9) = c \quad (5\cdot 9) = d \quad (3\cdot 8) = m \quad (3\cdot 1) = l$

Si $\widehat{2}$, punto simétrico de $\widehat{1}$ con respecto a $\widehat{0}$, lo unimos con 3, el triángulo $(1\cdot 2\cdot 3)$ será rectángulo en $\widehat{3}$, por ser el segmento $(1\cdot 2)$ diámetro de la esfera circunscrita al poliedro; por otra parte se verifica que $(1\cdot 8)$ es la proyección de $\overline{(3\cdot 1)}$ sobre $\overline{(1\cdot 2)}$. Por con-

siguiente, tendremos que

$$(3\cdot 7)^2 = (1\cdot 2) \times (1\cdot 8)$$

El triángulo $(3\cdot 8\cdot 7)$ también es rectángulo en $\widehat{8}$, verificándose que

$$(1\cdot 8)^2 = (3\cdot 7)^2 - (3\cdot 8)^2$$

que sustituido en la primera, nos da

$$(3\cdot 7)^2 = (1\cdot 2) \times \sqrt{(3\cdot 7)^2 - (3\cdot 8)^2}$$

teniendo en cuenta las cotas de la figura, tendremos

$$l^2 = 2a\sqrt{l^2 - m^2}$$

y despejando $\widehat{a}$

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} \qquad [1]$$

Si unimos el centro $\widehat{9}$ de una cara con uno de los vértices $\widehat{5}$ (fig. 22), y éste con $\widehat{0}$, el triángulo $(5\cdot 9\cdot 0)$ formado, será rectángulo en $\widehat{9}$, por lo que tendremos:

$$(0\cdot 9) = \sqrt{(0.5)^2 - (5\cdot 9)^2}$$

o sea

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} \qquad [2]$$

UNE A4 210 X 297

Si unimos finalmente el centro $\widehat{10}$ de una arista, con $\widehat{0}$, el triángulo $(0\cdot10\cdot1)$ será rectángulo en $\widehat{10}$, por lo que

$$(0\cdot10) = \sqrt{(0\cdot1)^2 - (10\cdot1)^2}$$

o sea

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} \qquad [3]$$

Con auxilio de las fórmulas (1), (2), (3), y calculando (previamente) para cada poliedro regular los valores de $\widehat{d}$ y $\widehat{m}$, pueden hallarse en cada caso los de $\widehat{a}$, b, y $\widehat{c}$.

Para el cálculo del diedro 2φ formado por dos caras contiguas, procederemos como sigue:

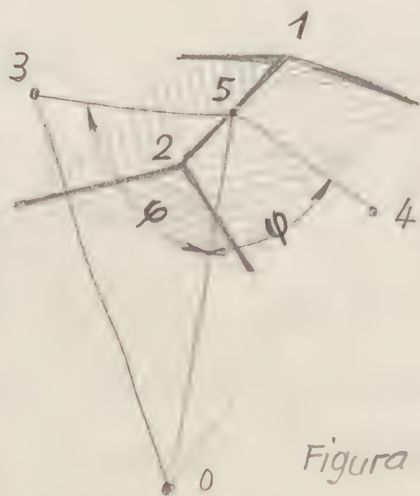


Figura 23

Consideremos (fig. 23) dos caras contiguas cuya arista común es $(1\cdot2)$, siendo $\widehat{3}$ y $\widehat{4}$ los centros de las mismas.

El plano perpendicular a $\widehat{(1\cdot2)}$ en su punto medio $\widehat{5}$, pasará por el centro $\widehat{0}$ de la esfera circunscrita al poliedro, y también por los centros $\widehat{3}$ y $\widehat{4}$ de las dos caras contiguas.

El ángulo $(3\cdot5\cdot4)$, rectilíneo del diedro formado por dichas caras, será la medida de dicho diedro.

Si unimos $\widehat{5}$ con $\widehat{0}$, el triángulo (3·5·0) será rectángulo en $\widehat{3}$, verificándose:

$$\operatorname{sen}(3 \cdot 5 \cdot 0) = \frac{(3 \cdot 0)}{(0 \cdot 5)} \; ; \quad \text{y sustituyendo valores}$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{c}{b} \qquad [4]$$

que nos permite calcular el ángulo $\widehat{\varphi}$, y por consiguiente el ángulo $\widehat{2\varphi}$ del diedro correspondiente.

10. Tetraedro regular

El tetraedro regular se compone de cuatro caras, cuatro vértices y seis aristas. Las caras son triángulos equiláteros. Una perspectiva del tetraedro regular, acotado con las dimensiones que se fijan en el ejercicio del párrafo 10.52, está realizada en la figura 23 [incluir perspectiva figura 23]

10.1 Representación en el sistema diédrico del tetraedro regular de lado "l" dado, por proceso exclusivamente gráfico

La representación la efectuaremos en los planos $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ y $\widehat{III}$, en el primer octante. Situaremos el tetraedro con una cara paralela a $\widehat{II}$ y una arista de ella perpendicular a $\widehat{I}$; el vértice opuesto a dicha cara lo consideramos encima de la misma. Los vértices se numerarán del $\widehat{1}$ al $\widehat{4}$.

No tendremos en cuenta las distancias relativas a que se encuentra el tetraedro con respecto a los planos de proyección, ni la magnitud del lado $\widehat{l}$, que queda a libre elección.

UNE A4 210 X 297



Refiriéndonos a la figura 24 efectuaremos las siguientes construcciones geométricas:

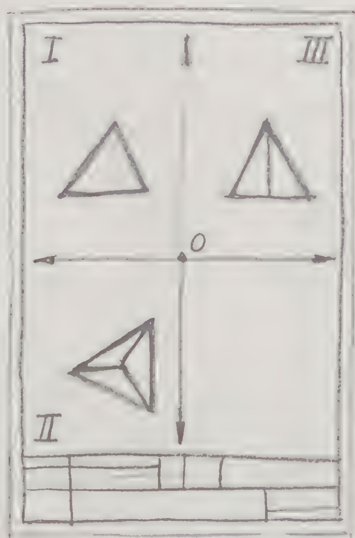


Figura 24

1º Situar previamente los ejes coordenados $\overline{+X, +Y, +Z}$.

2º Construir en el plano II un triángulo equilátero II(2·3·4), de lado ℓ y de forma que el lado II(2·3) sea perpendicular a +X (ver ficha P.G. 2352).

3º Trazar las alturas de dicho triángulo limitándolas en sus puntos de intersección, proyección del cuarto vértice II(1) del tetraedro.

Uniendo estos puntos en la forma representada en la figura, tendremos la proyección del tetraedro sobre II.

4º Proyectar sobre I el lado II(4·2) o también el II(4·3) que será una recta paralela a +X.

5º Con centro en I(4) y radio ℓ trazar un arco.

6º Construir en II la cara II(1·2·3) contigua a la II(2·3·4) y abatida sobre el plano de ésta, determinando al mismo tiempo su centro.

7º Hacer girar en I dicha cara, alrededor de la arista común I(2·3) mediante el trazado de un arco de centro I(2), hasta que corte en I(1) el ya trazado anteriormente según 5º. Este punto I(1) debe corresponderse con el II(1) obtenido independientemente.

Págs.

61 al 70

Las construcciones 1ª a 7ª nos dan la proyección del tetraedro sobre el plano $\widehat{II}$.

La proyección sobre $\widehat{III}$ es inmediata y se deduce de las $\widehat{I}$ y $\widehat{II}$ (segmento $III(3\cdot2) = \ell$).

El centro $\widehat{O}$ del tetraedro en el plano II, se obtiene mediante la misma construcción 7ª girando el centro de la cara abatida $\overline{I(1\cdot2\cdot3)}$, hasta obtener su proyección en $\widehat{I}$; la perpendicular a $I(1\cdot2\cdot3)$ en dicho centro cortará al eje en el punto buscado $\overline{I(0)}$.

Con las construcciones anteriores se obtiene en $\widehat{I}$ la verdadera magnitud del ángulo diedro 2φ del tetraedro.

10.2 Cálculo de las magnitudes fundamentales del tetraedro regular, en función de la arista "ℓ" del mismo.

Siguiendo el criterio establecido en el párrafo 9.1, determinaremos analíticamente las siguientes magnitudes.

10.21 Cálculo del radio "a" de la esfera circunscrita al tetraedro regular, en función de la arista "ℓ."

Considerando un ángulo sólido del mismo, concurren en él tres triángulos equiláteros de lado $\widehat{\ell}$ y tres aristas también iguales a $\widehat{\ell}$, cuyos extremos forman a su vez un triángulo equilátero de lado $\widehat{\ell}$.

El radio $\widehat{m}$ de la circunferencia circunscrita a este último triángulo equilátero, en función de su lado, valdrá

según se deduce en la geometría métrica.

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$$

valor que sustituido en [1] (ver párrafo 9.1) nos da

$$a = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}\,\ell = 0,61\ 23\ 72\ldots\ell \quad [5]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$a = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \frac{3\ell^2}{9}}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\frac{6\ell^2}{9}}} =$$

$$= \frac{\ell^2}{\frac{2\ell}{3}\sqrt{6}} = \frac{3\ell}{2\sqrt{6}} = \frac{3\ell\sqrt{6}}{12} = \boxed{\frac{\ell\sqrt{6}}{4} = a} = [1,\overline{1.1.1.2}]$$

10.22 Cálculo del radio "b" de la esfera tangente a las aristas del tetraedro regular, en función de su arista "ℓ".

Según la fórmula [3] deducida en el párrafo 9.1, y la [5] del párrafo 10.21, tendremos

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\,\ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,\ell = 0.35\ 35\ 53\ldots\ell \quad [6]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$b = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\,\ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{6}{16}\,\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \ell\sqrt{\frac{6}{16} - \frac{1}{4}} = \ell\sqrt{\frac{24-16}{64}} =$$

$$= l\sqrt{\frac{8}{64}} = l\,\frac{\sqrt{8}}{8} = l\,\frac{2\sqrt{2}}{8} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}\,l = b} = [2,\ \widehat{1,\ 4}]\,l$$

10.23 Cálculo del radio "c" de la esfera inscrita en el tetraedro regular, en función de su arista "l".

Para ello calculemos previamente el radio d de la circunferencia circunscrita a una cara, que siendo un triángulo equilátero valdrá:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{3}\,l = 0.57\ 73\ 50\ldots\ l = [1,\ \widehat{1,2}]\,l \quad [7]$$

valor que sustituido en la fórmula [2] del párrafo 9.1, nos da, junto con el a del párrafo 10.21

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\,l\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{12}\,l = 0,20\ 41\ 24\ldots\ l \quad [8]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente;

$$c = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\,l\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{16}\,l^2 - \frac{3}{9}\,l^2} = l\sqrt{\frac{3}{8} - \frac{1}{3}} = l\sqrt{\frac{9-8}{24}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\,l = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{12}\,l = c} = [4,\ \widehat{1,8}]\,l$$

10.24 Cálculo del ángulo "2φ" del diedro formado por dos caras contiguas del tetraedro regular.

Para el cálculo del diedro "2φ" formado por dos ca-

ras contiguas, aplicaremos directamente la fórmula [4], deducida en el párrafo 9.1, función de las magnitudes $\hat{b}$ y $\hat{c}$ obtenidas en 10.22 y 10.23 respectivamente

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{6}}{12} l : \frac{\sqrt{2}}{4} l = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57\ 73\ 50\ldots$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{6}}{12} l : \frac{\sqrt{2}}{4} l = \frac{4\sqrt{6}}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.57\ 73\ 50\ldots = (1, \widehat{1, 2})$$

de cuyo valor se deduce $\varphi = 35^\circ\ 15'\ 51{,}8''$

de donde $2\varphi = 70^\circ\ 31'\ 43{,}6''$ [9]

El desarrollo del cálculo logarítmico es el siguiente:

$\log \operatorname{sen} \varphi = \log 0,57\ 73\ 50\ldots = \bar{1},76\ 14\ 39\ 2$, de donde

$$\varphi = \text{arc. antilog. } \bar{1},76\ 14\ 39\ 2 = 35^\circ\ 15'\ 51{,}7''$$

10.3 Cálculo de magnitudes especiales del tetraedro regular en función de su arista "l".

Dentro de este grupo estudiaremos las siguientes:

10.31 Cálculo de la apotema "k" de una cara del tetraedro regular en función de su arista "l"

La apotema $\widehat{k}$ de una cara, es la de un triángulo equilátero (de lado $\widehat{\ell}$); el centro de la circunferencia circunscrita al mismo se encuentra a una distancia de dicho lado $\widehat{\ell}$, igual al tercio de la altura del triángulo; por consiguiente su valor será:

$$k = \frac{1}{3}\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,\ell = 0{,}28\ 86\ 75\ldots\ \ell = [3,\ \overline{2,\ 6}]\,\ell \quad [10]$$

10.32 Cálculo de la altura "h" del tetraedro regular, en función de su arista "ℓ".

Según se deduce de la proyección $\widehat{I}$ del tetraedro regular, representado en la figura 23, dicha altura es el cateto de un triángulo rectángulo, de hipotenusa $\widehat{\ell}$ y cateto $\widehat{d}$ cuyo valor se dedujo en [7], párrafo 10.23.

$$h = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}\,\ell = 0{,}81\ 64\ 97\ldots\ \ell = [1,\ \overline{4,\ 2}]\,\ell \quad [11]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{3}{9}\ell^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{3}} = \sqrt{\frac{2\,\ell^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\ell = \frac{\sqrt{6}}{3}\,\ell = (1,\ \overline{4,\ 2})\,\ell$$

10.33 Relaciones importantes entre las magnitudes calculadas del tetraedro regular

De las fórmulas [7] y [10] se deduce $d = 2k$ [12]

De las fórmulas [11], [5] y [8] se deduce $h = a + c = \frac{4}{3}a = 4c$ [13]

De las fórmulas [5] y [8] se deduce $a = 3c$ [14]

10.34 Cálculo de la superficie "S" del tetraedro regular, en función de su arista "l".

El área S_1 de una cara será la de un triángulo equilátero de lado l, y su valor

$$S_1 = \frac{l}{2} \times \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

El área total S, será igual a

$$S = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \sqrt{3} \cdot l^2 = 1.73\ 20\ 51 \ldots l^2 \quad [15]$$

$$= 1\ (\widehat{1.2})\ l^2$$

10.35 Cálculo del volumen "V" del tetraedro regular, en función de su arista "l".

Si unimos los vértices de una cara con el centro del poliedro regular, obtendremos una pirámide regular, cuya base es dicha cara y su altura el radio c de la esfera inscrita al tetraedro; su volumen V_1 valdrá

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1\ c = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \times \frac{\sqrt{6}}{12} l = \frac{\sqrt{2}}{48} l^3$$

y el volumen total V, será igual a

$$V = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{48} l^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3 = 0.11\ 78\ 51 \ldots l^3 \quad [16]$$

$$= [8.\ \widehat{2.16}]\ l^3$$

10.4 Resumen del cálculo de magnitudes del tetraedro regular en función de la arista ℓ del mismo.

A continuación exponemos en forma tabulada los resultados de los cálculos desarrollados en los párrafos 10.21 a 10.24 y 10.31 a 10.35, cuya nomenclatura es la siguiente:

- a Radio de la esfera circunscrita (párrafo 10.21, fórmula 5).
- b Radio de la esfera tangente a las aristas (párrafo 10.22, fórmula 6).
- c Radio de la esfera inscrita (párrafo 10.23, fórmula 8).
- d Radio de la circunferencia circunscrita a una cara (párrafo 10.23, fórmula 7).
- 2φ Angulo del diedro (párrafo 10.24, fórmula 9).
- k Apotema de una cara (párrafo 10.31, fórmula 10).
- h Altura del tetraedro (párrafo 10.32, fórmula 11).
- Relaciones entre magnitudes (párrafo 10.33, fórmulas 12, 13 y 14).
- S Superficie (párrafo 10.34, fórmula 15).
- V Volumen (párrafo 10.35, fórmula 16).

UNE A4 210 X 297

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{6}}{4}\ell$	$0,61\ 23\ 72\ldots\ \ell$
b	$\frac{\sqrt{2}}{4}\ell$	$0,35\ 35\ 53\ldots\ \ell$
c	$\frac{\sqrt{6}}{12}\ell$	$0,20\ 41\ 24\ldots\ \ell$
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ell$	$0,57\ 73\ 50\ldots\ \ell$
2φ	$\text{sen}\ \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$0,57\ 73\ 50\ldots$ $2\varphi = 70^\circ\ 31'\ 43,4''$
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\ell$	$0,28\ 86\ 75\ldots\ \ell$
h	$\frac{\sqrt{6}}{3}\ell$	$0,81\ 64\ 97\ldots\ \ell$
S	$\sqrt{3}\ \ell^2$	$1,73\ 20\ 51\ldots\ \ell^2$
V	$\frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3$	$0,11\ 78\ 51\ldots\ \ell^3$
Relaciones entre magnitudes		
$h = a + c$ $\quad h = \frac{4}{3}a$		$h = 4c$
$a = 3c$		$d = 2k$

10.5 Representación en el Sistema diédrico del tetraedro regular de lado "ℓ" por proceso gráfico - analítico.

Antes de detallar esta representación, vamos a exponer unas consideraciones generales que servirán igualmente para

los restantes poliedros regulares.

10.51 Consideraciones previas

El proceso gráfico-analítico consiste simplemente en obtener la representación gráfica de las figuras, no en forma exclusivamente geométrica, como se ha realizado en las construcciones estudiadas en el párrafo 10.1, sino auxiliándose en el dibujo de magnitudes previamente calculadas.

Este proceso tiene gran analogía con el seguido en el Dibujo técnico, donde la representación de los objetos, se hace generalmente a escala, figurando en él las dimensiones del mismo mediante cifras de cota, que cuando son independientes se fijan por el proyectista y cuando no lo son se calculan previamente.

En el estudio que estamos realizando sobre los poliedros regulares nos encontramos en este último caso, ya que todas las magnitudes calculadas lo son en función del dato único $\widehat{l}$, longitud de su arista.

El proceso gráfico-analítico permite realizar su trazado a escala para cualquier longitud fijada a la arista $\widehat{l}$ del poliedro, obteniéndose con rapidez y exactitud su representación, en la que los errores gráficos quedan notablemente reducidos. Por otra parte, pueden acotarse sus medidas fundamentales con cifras prácticamente exentas de error, ya que dependen de un cálculo ana-

lítico y no obtenidas por medición directa sobre el dibujo, afectadas siempre de errores tanto mayores cuanto más pequeña sea la escala de representación.

Otra ventaja de este proceso es la de poder fijarse analíticamente, mediante coordenadas cartesianas, la situación y posición de la figura en relación con los planos de proyección, lo cual permite plantear problemas de representación mediante datos adecuados que conducen siempre a un resultado único.

Los ejercicios de estudio que presentamos en este trabajo, están previstos para poder realizarse en formato normalizado A4 vertical (ver ficha N. 4202) y a la escala normalizada de 1:2.5. El cajetín de rotulación puede elegirse a voluntad adaptándose a la altura total fijada en 40 mm. * Para uniformidad en el tamaño real de las figuras, hemos considerado constante en todas ellas el radio $\hat{a}$ de la esfera circunscrita, el cual es el calculado para el icosaedro regular de arista igual a 100 mm. Este radio constante tiene por valor numérico $a = 95.1$ mm.; Esto justifica sean números decimales las longitudes de las aristas de los distintos poliedros regulares fijadas como datos de representación, excepto la del icosaedro regular.

* El que hemos adoptado en las figuras, es el tipo diamante, detallado en la obra del autor "Dibujo.- Primer curso. Grado de Aprendizaje, 1ª parte" en las páginas 6 a 8.

Págs.

71 al 80

10.52 Ejercicio de aplicación al tetraedro regular del procedimiento gráfico-analítico.

ENUNCIADO.- Representar en el Sistema diédrico, con tres proyecciones, y a escala 1:2,5, un tetraedro regular de 155,3 mm de arista, de forma que una de sus caras (base) sea paralela al plano $\widehat{II}$ y uno de los lados de dicha cara, perpendicular al eje $\widehat{+X}$. El centro O del tetraedro tiene por coordenadas reales O (120, 120, 150) mm, y está por encima de la cara base.

SOLUCION

Refiriéndonos a la figura 24, efectuaremos las siguientes construcciones y operaciones:

1º Recuadrado del papel A4 v (a 5 mm. del borde), colocación del cajetín y situación de los ejes coordenados a las distancias marcadas en la figura (100 y 117 mm).

2ª Calcular, de acuerdo con los valores del cuadro sinóptico incluido en el párrafo 10.4, las dimensiones en milímetros de las magnitudes $\overline{a, b, c, d, k}$ y $\overline{h}$. Los resultados de estas operaciones, con una cifra decimal, son los siguientes:

a = 95,1; b = 54,9; c = 31,7; d = 89,7; k = 44,8; h = 126,8.

3ª Situar sobre el dibujo, en sus tres proyecciones, el centro del tetraedro $\overline{O}$, de acuerdo con sus coorde-

nadas y escala.

4ª Dibujar directamente cada proyección de acuerdo con la escala y magnitudes acotadas en la mencionada figura 24, así como la posición fijada en el enunciado.

5ª Numerar sus vértices del 1 al 4 en sus tres vistas

6ª Acotar con cifras las dimensiones calculadas y comprobar la amplitud del ángulo $\widehat{2\varphi}$ en la proyección I (con el semicírculo graduado).

Durante el trazado de las proyecciones podrán efectuarse comprobaciones gráficas de magnitudes o de tangencias que nos advertirán sobre posibles errores de escala o falta de exactitud en el traslado de cotas al dibujo. Al emplear el procedimiento descrito anteriormente, son innecesarios los trazados clásicos de la Geometría descriptiva (giros y abatimientos) que requieren un escrupuloso trazado.

El proceso gráfico-analítico presenta gran semejanza con el seguido en el Dibujo técnico para la representación de objetos industriales (vistas, cortes y acotación con cifras).

10.53 Desarrollo del tetraedro regular

Los poliedros son figuras geométricas desarrollables, es decir que podemos trasladar todas sus caras a un plano único, conservando un determinado orden de colocación que permita reconstruir el poliedro inicial.

El desarrollo del tetraedro regular (fig. 25) se com-

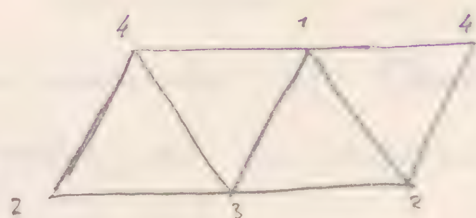


Figura 25

pone de cuatro triángulos equiláteros de lado $\widehat{l}$, colocados contiguamente y numerados en el orden que se indica en la figura.

El orden de numeración se corresponde con el dado en perspectiva en la figura 23 y en proyecciones en la figura 24.

11. Exaedro regular

El exaedro regular se compone de seis caras, ocho vértices y doce aristas. Las caras son cuadrados.

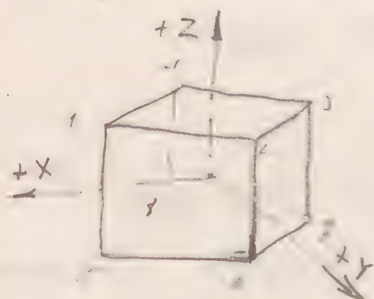


Figura 26

Una perspectiva axonométrica del exaedro regular, acotada con las dimensiones que se fijan en el ejercicio del párrafo 11,51, está representada en la figura 26.

11.1 Representación en el Sistema diédrico del exaedro regular de lado "l" dado, por proceso exclusivamente gráfico.

La representación la efectuaremos en los planos $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ y $\widehat{III}$. Situaremos el exaedro con una de sus caras (inferior) paralela al plano $\widehat{II}$, y una diagonal de dicha cara, perpendicular al eje +X. Los vértices se numerarán del 1 al 8.

No tendremos en cuenta las distancias relativas a que se encuentra el tetraedro con respecto a los planos de proyección, ni la magnitud del lado $\widehat{l}$, que queda a libre elección.

Refiriéndonos a la figura 27, efectuaremos las siguientes construcciones geométricas:

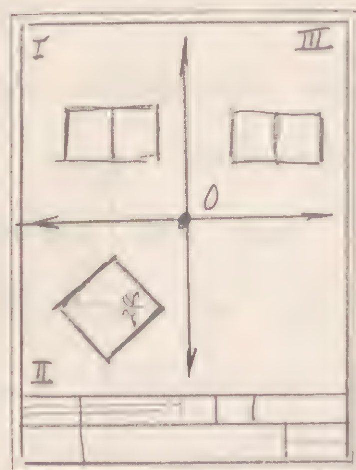


Figura 27

1º Situar previamente los ejes coordenados $\overline{+X, \; +Y, \; +Z}$.

2º Construir en el plano $\widehat{II}$ un cuadrado $\overline{II(5\cdot6\cdot7\cdot8)}$ de lado $\widehat{l}$ y de forma que una diagonal sea paralela al eje $\widehat{+X}$ (el lado forma un ángulo de 45° con la diagonal).

Con esta sola figura queda representado el exaedro en su proyección sobre $\widehat{II}$.

Las proyecciones sobre I y III son iguales entre sí, y su contorno es un rectángulo de lado $\widehat{5\cdot7}$ (diagonal del cuadrado) y altura $\widehat{l}$, por lo que su construcción es inmediata.

Con las construcciones anteriores se obtiene en II la verdadera magnitud del ángulo diedro $\widehat{24}$ del exaedro.

<u>11. 2 Cálculo de las magnitudes fundamentales del exaedro regular, en función de la arista "l" del mismo.</u>

Siguiendo el criterio establecido en el párrafo 9.1, determinaremos analíticamente las siguientes magnitudes.

<u>11.21 Cálculo del radio "a" de la esfera circunscrita al exaedro regular, en función de la arista "l".</u>

Considerando un ángulo sólido del mismo, concurren en él tres cuadrados de lado l y tres aristas también iguales a l, cuyos extremos forman a su vez un triángulo equilátero de lado $\sqrt{2}\, l$ (diagonal del cuadrado).

El radio m de la circunferencia circunscrita a este último triángulo equilátero, valdrá

$$m = \frac{(\sqrt{2}\, l) \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}\, l$$

valor que sustituido en [1] (ver párrafo 9.1) nos da

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\, l\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l = 0.86\ 60\ 25 \ldots l \qquad [17]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\, l\right)^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \frac{6}{9}\, l^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \frac{2}{3}\, l^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{\frac{3l^2 - 2l^2}{3}}} =$$

$$= \frac{l^2}{2\sqrt{\frac{l^2}{3}}} = \frac{l^2}{2l \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\, l = a} = [1.\ 6.\ 2]$$

11.22 Cálculo del radio "b" de la esfera tangente a las aristas del exaedro regular, en función de su arista "l".

Según la fórmula [3] deducida en el párrafo 9.1, y la [17] del párrafo 11.21, tendremos

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} l = 0.70\ 71\ 07 \ldots l \qquad [18]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3 l^2}{4} - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{l^2}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} l = b} = [1, \widehat{2}]\, l$$

11.23 Cálculo del radio "c" de la esfera inscrita en el exaedro regular, en función de su arista "l".

Aun cuando el valor de $\widehat{c}$ es inmediato $\left(c = \frac{1}{2} l\right)$ lo calcularemos siguiendo el proceso general.

Para ello determinemos previamente el radio $\widehat{d}$ de la circunferencia circunscrita a una cara, que será la de un cuadrado de lado $\widehat{l}$, y cuyo valor es

$$d = \frac{\sqrt{2}}{2} l = 0.70\ 71\ 07 \ldots l = [1. \widehat{2}]\, l \qquad [19]$$

valor que sustituido en la fórmula [2] del párrafo 9.1, nos da, junto con el de $\widehat{a}$ del párrafo 11.21

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} l\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l\right)^2} = \frac{1}{2} l = 0.50\ 00\ 00\ l \qquad [20]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}\ell^2 - \frac{2}{4}\ell^2} = \ell\sqrt{\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}\ell = c}$$

11.34 Cálculo del ángulo "2φ" del diedro formado por dos caras contiguas del exaedro regular.

El valor de este ángulo es inmediato $(2\varphi = 90°)$; no obstante lo calcularemos siguiendo el proceso general.

Para ello aplicaremos directamente la fórmula [4], deducida en el párrafo 9.1, función de las magnitudes $\widehat{b}$ y $\widehat{c}$, anteriormente determinadas (fórmulas 20 y 18)

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}\ell : \frac{\sqrt{2}}{2}\ell = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \varphi = 45°$$

$$2\varphi = 90° \qquad [21]$$

11.3 Cálculo de magnitudes especiales del exaedro regular en función de su arista $\widehat{\ell}$.

Dentro de este grupo estudiaremos las siguientes:

11.31 Cálculo de la apotema "k" de una cara del exaedro regular, en función de su arista "ℓ"

Por ser la cara un cuadrado de lado $\widehat{\ell}$, la apotema del mismo tiene el valor

$$k = \frac{1}{2}\ell = 0.50\ 00\ 00\ \ell \qquad [22]$$

11.32 Cálculo de la altura "h" del exaedro regular, en función de su arista "l".

La determinación de esta altura no necesita cálculo alguno, ya que

$$h = l \qquad [23]$$

11.33 Relaciones importantes entre las magnitudes calculadas del exaedro regular.

De las fórmulas [20] y [22] se deduce $c = k$ [24]

De las fórmulas [18] y [19] se deduce $b = d$ [25]

De las fórmulas [23], [20] y [22] se deduce $h = 2c = 2k$ [26]

11.34 Cálculo de la superficie "S" del exaedro regular, en función de su arista "l".

El área S_1 de una cara será la de un cuadrado de lado $\overline{l}$, y su valor

$$S_1 = l^2$$

El área total S, será igual a

$$S = 6l^2 \qquad [27]$$

11.35 Cálculo del volumen "V" del exaedro regular, en función de su arista "l".

Si unimos los vértices de una cara con el centro

UNE A4 210 X 297

del poliedro regular, obtendremos una pirámide regular, cuya base es dicha cara y su altura el radio c de la esfera inscrita al exaedro; su volumen V_1 valdrá

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1 c = \frac{1}{3} \ell^2 \frac{\ell}{2} = \frac{1}{6} \ell^3$$

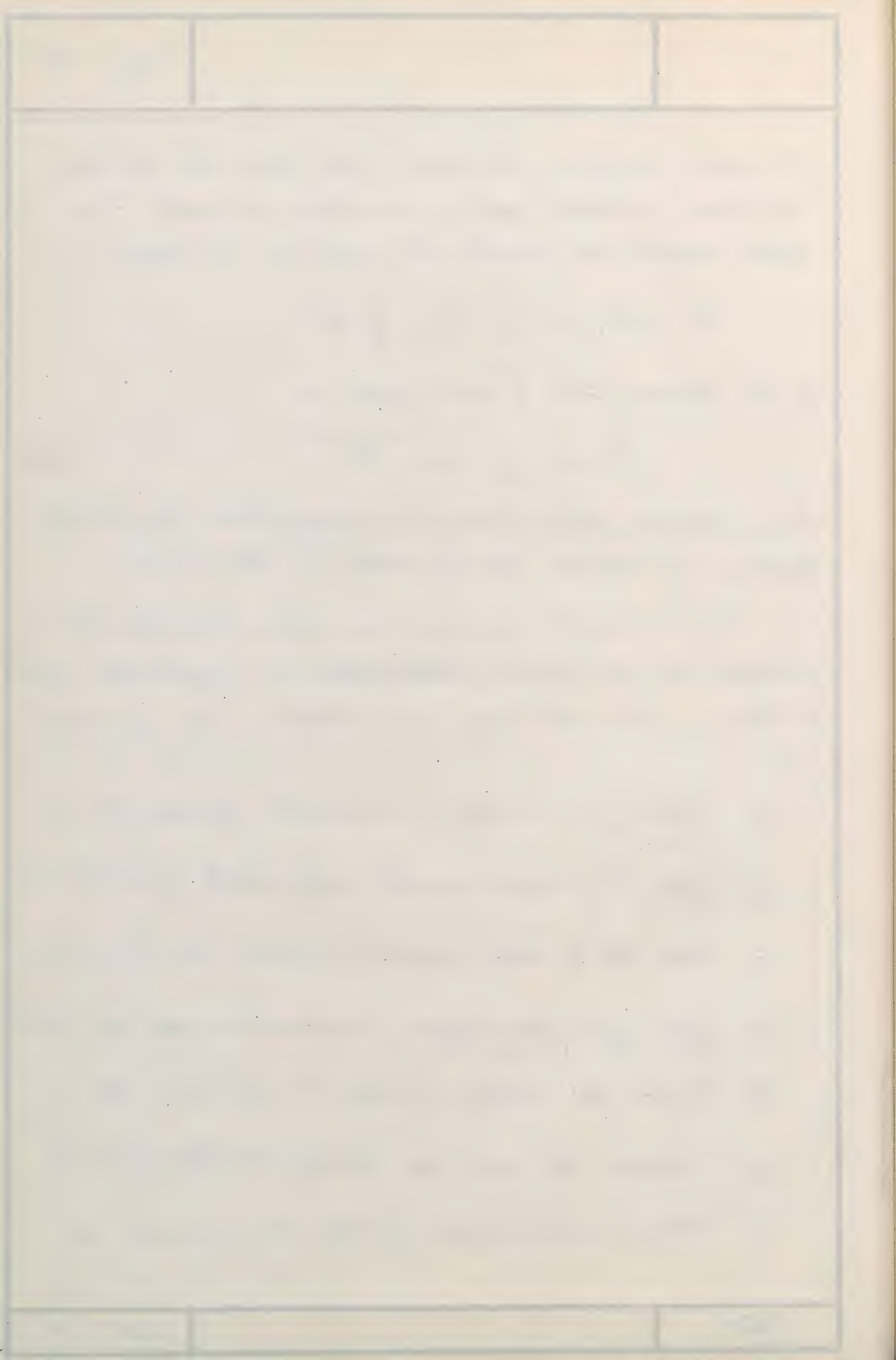
y el volumen total V, será igual a

$$V = 6 \times \frac{1}{6} \ell^3 = \ell^3 \qquad [28]$$

11.4 Resumen del cálculo de magnitudes del exaedro regular, en función de la arista ℓ del mismo.

A continuación exponemos en forma tabulada los resultados de los cálculos desarrollados en los párrafos 11.21 a 11.24 y 11.31 a 11.35, cuya nomenclatura es la siguiente:

- a Radio de la esfera circunscrita (párrafo 11.21, fórmula 17).
- b Radio de la esfera tangente a las aristas (párrafo 11.22, fórmula 18).
- c Radio de la esfera inscrita (párrafo 11.23, fórmula 20).
- d Radio de la circunferencia circunscrita a una cara (párrafo 11.23, fórmula 19).
- 2φ Ángulo del diedro (párrafo 11.24, fórmula 21).
- k Apotema de una cara (párrafo 11.31, fórmula 22).
- h Altura del exaedro (párrafo 11.32, fórmula 23).



Relaciones entre magnitudes (párrafo 11.33. fórmulas 24, 25 y 26).

S Superficie (párrafo 11.34, fórmula 27)

V Volumen (párrafo 11.35, fórmula 28).

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{3}}{2} \ell$	$0,86\ 60\ 25 \ldots \ell$
b	$\frac{\sqrt{2}}{2} \ell$	$0,70\ 71\ 07 \ldots \ell$
c	$\frac{1}{2} \ell$	$0,50\ 00\ 00 \ldots \ell$
d	$\frac{\sqrt{2}}{2} \ell$	$0.70\ 71\ 07 \ldots \ell$
2φ	$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$0,70\ 71\ 07 \ldots$ $2\varphi = 90°$
k	$\frac{1}{2} \ell$	$0,50\ 00\ 00 \ldots \ell$
h	ℓ	$1,00\ 00\ 00 \ldots \ell$
S	$6\ \ell^2$	$6,00\ 00\ 00 \ldots \ell^2$
V	ℓ^3	$1,00\ 00\ 00 \ldots \ell^3$
Relaciones entre magnitudes		
$c = k$	$b = d$	$h = 2c \quad h = 2k$

Págs.

81 al 90

11.5 Representación en el sistema diédrico del exaedro regular de lado "l" dado, por proceso gráfico-analítico.

11.51 Ejercicio de aplicación

ENUNCIADO.- Representar en el Sistema diédrico con tres proyecciones y a escala 1:2.5, un exaedro regular de 109.8 mm de arista, de forma que una de sus caras (base) sea paralela al plano II y una diagonal de dicha cara, perpendicular al eje $\widehat{+X}$. El centro $\widehat{O}$ del exaedro tiene por coordenadas reales O (120, 120, 150) mm y está por encima de su cara base.

SOLUCIÓN

Refiriéndonos a la figura 27, efectuaremos las siguientes construcciones y operaciones:

1º Recuadrado del papel A4V (a 5 mm del borde), colocación del cajetín (ver párrafo 10.51) y situación de los ejes coordenados a las distancias marcadas en la figura (100 y 117 mm).

2º Calcular, de acuerdo con el cuadro sinóptico incluido en el párrafo 11.4, las dimensiones en milímetros de las magnitudes a, b, c, d, y k. Los resultados de estas operaciones, con una cifra decimal, son los siguientes: a = 95,1; b = 77,6; c = 54,9; d = 77.6; k = 54.9;

3ª Situar sobre el dibujo en sus tres proyecciones, el centro del exaedro $\overline{O}$, de acuerdo con sus coordenadas y escala.

4ª Tomando como base de trasado los radios $\overline{a = 95,1}$, $\overline{b = 77,6}$ y $\overline{c = 54,9}$, dibujar los sencillos contornos (rectangulos y cuadrado) de sus tres proyecciones, con la escala graduada y comprobar las magnitudes gráficas del dibujo $\overline{d = b = 77,6}$, $\overline{k = c = 54,9}$ así como la magnitud del lado $\overline{l = 109,8}$.

5ª Numerar sus vértices del 1 al 8 en sus tres vistas

6ª Acotar con cifras las dimensiones calculadas.

11.52 Desarrollo del exaedro regular

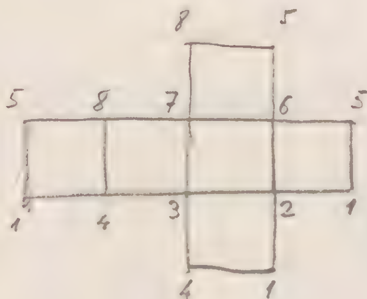


Figura 28

El desarrollo del exaedro regular (fig. 28) se compone de seis cuadrados de lado $\overline{l}$, colocados contiguamente y numerados en el orden que se indica en la figura, que se corresponde a su vez con el de las figuras 26 y 27

12 Octaedro regular

El octaedro regular se compone de $\widehat{\text{ocho}}$ caras, $\widehat{\text{seis}}$ vértices y $\widehat{\text{doce}}$ aristas. Las caras son triángulos equiláteros.

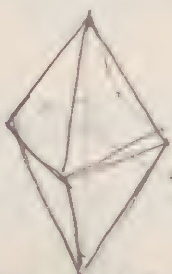


Figura 29

Una perspectiva axonométrica del octaedro regular, acotada con las

dimensiones que se fijan en el ejercicio del párrafo 12.51, está representada en la figura 29.

12.7 Representación en el Sistema diédrico del octaedro regular de lado "l" dado, por proceso exclusivamente gráfico.

La representación la efectuaremos en los planos I, II y III. Situaremos el octaedro con una de sus caras perpendicular al plano I, y una diagonal del mismo, perpendicular al plano II. Los vértices se numerarán del 1 al 6.

No tendremos en cuenta las distancias relativas a que se encuentra el octaedro con respecto a los planos de proyección, ni la magnitud del lado l, que queda a libre elección.

Refiriéndonos a la figura 30, efectuaremos las siguientes construcciones geométricas:

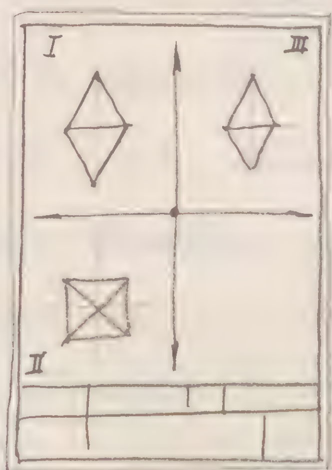


Figura 30.

1º Situar previamente los ejes coordenados +X, +Y, +Z.

2º Construir en el plano II un cuadrado II (2·3·4·5) de lado l paralelo al eje +X, y sus respectivas diagonales.

Con esta sola figura queda representado el octaedro en su proyección sobre II. La semidiagonal del cuadrado es el radio a de la esfera circunscrita.

Las proyecciones sobre $\widehat{I}$ y $\widehat{III}$ son iguales entre sí, y su contorno es un rombo de diagonales $\widehat{l}$ paralela a $\widehat{+X}$ y $\widehat{2a}$ paralela a $\widehat{+Z}$, por lo que su construcción es inmediata.

Con las construcciones anteriores se obtiene en $\widehat{I}$ (o en $\widehat{III}$) la verdadera magnitud del ángulo diedro $\widehat{2\varphi}$ del octaedro.

12.2 Cálculo de las magnitudes fundamentales del octaedro regular, en función de la arista "l" del mismo.

Siguiendo el criterio establecido en el párrafo 9.1, determinaremos analíticamente las siguientes magnitudes.

12.21 Cálculo del radio "a" de la esfera circunscrita al octaedro regular, en función de la arista "l."

Considerando un ángulo sólido del mismo, concurren en él cuatro triángulos equiláteros de lado $\widehat{l}$ y cuatro aristas ~~también~~ iguales a $\widehat{l}$, cuyos extremos forman a su vez un cuadrado también de lado $\widehat{l}$.

El radio $\widehat{m}$ de la circunferencia circunscrita a este último cuadrado, será

$$m = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l$$

valor que sustituido en (1) (ver párrafo 9.1) nos da

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l = 0.70\ 71\ 07 \ldots\ l \qquad [29]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l\right)^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \frac{2\,l^2}{4}}} = \frac{l^2}{2\sqrt{\frac{l^2}{2}}} = \frac{l^2}{\frac{2\,l}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\, l} = a = [\,1,\ \widehat{2}\,]\ l$$

12.22 Cálculo del radio "b" de la esfera tangente a las aristas del octaedro regular, en función de su arista "l"

Según la fórmula [3] deducida en el párrafo 9.1, y la [29] del párrafo 12.21, tendremos:

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{1}{2}\, l = 0.50\ 00\ 00 \ldots\ l \qquad [30]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$b = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{2\,l^2}{4} - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{l^2}{4}} = \frac{l}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\, l}$$

12.23 Cálculo del radio "c" de la esfera inscrita en el octaedro regular, en función de su arista "l".

Para ello calculemos previamente el radio $\widehat{d}$ de la circunferencia circunscrita a una cara, que siendo un triángulo equilátero, valdrá:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l = 0{,}57\ 73\ 50 \ldots l = [1,\ \widehat{1,2}]\, l \qquad [31]$$

valor que sustituido en la fórmula [2] del párrafo 9.1. nos da, junto con el $\hat{a}$ del párrafo 12.21

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\, l\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\, l = 0{,}40\ 82\ 48 \ldots l \qquad [32]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\, l\right)^2} = \sqrt{\frac{2\, l^2}{4} - \frac{3\, l^2}{9}} = \sqrt{\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{3}} = \sqrt{\frac{3\, l^2 - 2\, l^2}{6}} =$$

$$= \sqrt{\frac{l^2}{6}} = \frac{l}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}\, l} = [2,\ \widehat{2,4}]\, l = \boxed{c}$$

12.24 Cálculo del ángulo "2φ" del diedro formado por dos caras contiguas del octaedro regular.

Para el cálculo del diedro $\widehat{2\varphi}$ formado por dos caras contiguas, aplicaremos directamente la fórmula [4], deducida en el párrafo 9.1, función de las magnitudes $\hat{b}$ y $\hat{c}$ obtenidas en 12.22 y 12.23 respectivamente.

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{6}}{6}\, l : \frac{1}{2}\, l = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0{,}81\ 64\ 97 \ldots = (1,\ \widehat{4,2})$$

de cuyo valor se deduce $\qquad \varphi = 54°\ 44'\ 8{,}3''$

de donde $\qquad 2\varphi = 109°\ 28'\ 16{,}6'' \qquad [33]$

El desarrollo del cálculo logarítmico es el siguiente:

$\log \operatorname{sen} \varphi = \log 0{,}81\ 64\ 97 \ldots = \bar{1},91\ 19\ 54\ 6 \ldots,$ de donde

φ = arc. antilog. $\bar{1}$,91 19 54 6... = 54° 44' 8,3"

12.3 Cálculo de las magnitudes especiales del octaedro regular, en función de su arista "l".

Dentro de este grupo estudiaremos la siguiente:

12.31 Cálculo de la apotema "k" de una cara del octaedro regular, en función de su arista "l".

La apotema k de una cara es la de un triángulo equilátero de lado l; el centro de la circunferencia circunscrita al mismo se encuentra a una distancia de dicho lado l, igual al tercio de la altura del triángulo; por consiguiente su valor será:

$$k = \frac{1}{3}\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,l = 0,28\ 86\ 75 \ldots\ l = [3, \overline{2,6}] \qquad [34]$$

12.32 Relaciones importantes entre las magnitudes calculadas del octaedro regular

De las fórmulas [31] y [34] se deduce $d = 2k$ [35]

De la fórmula [30] se deduce $l = 2b$ [36]

12.33 Cálculo de la superficie "S" del octaedro regular, en función de su arista "l"

El área S_1 de una cara será la de un triángulo

equilátero de lado l, y su valor

$$S_1 = \frac{l}{2} \times \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

El área total S, será igual a

$$S = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = 2\sqrt{3}\, l^2 = 3,46\ 41\ 02 \ldots\ l^2 \qquad [37]$$

$$= 3\,(\widehat{2,6})$$

12.34 Cálculo del volumen "V" del octaedro regular, en función de su arista "l"

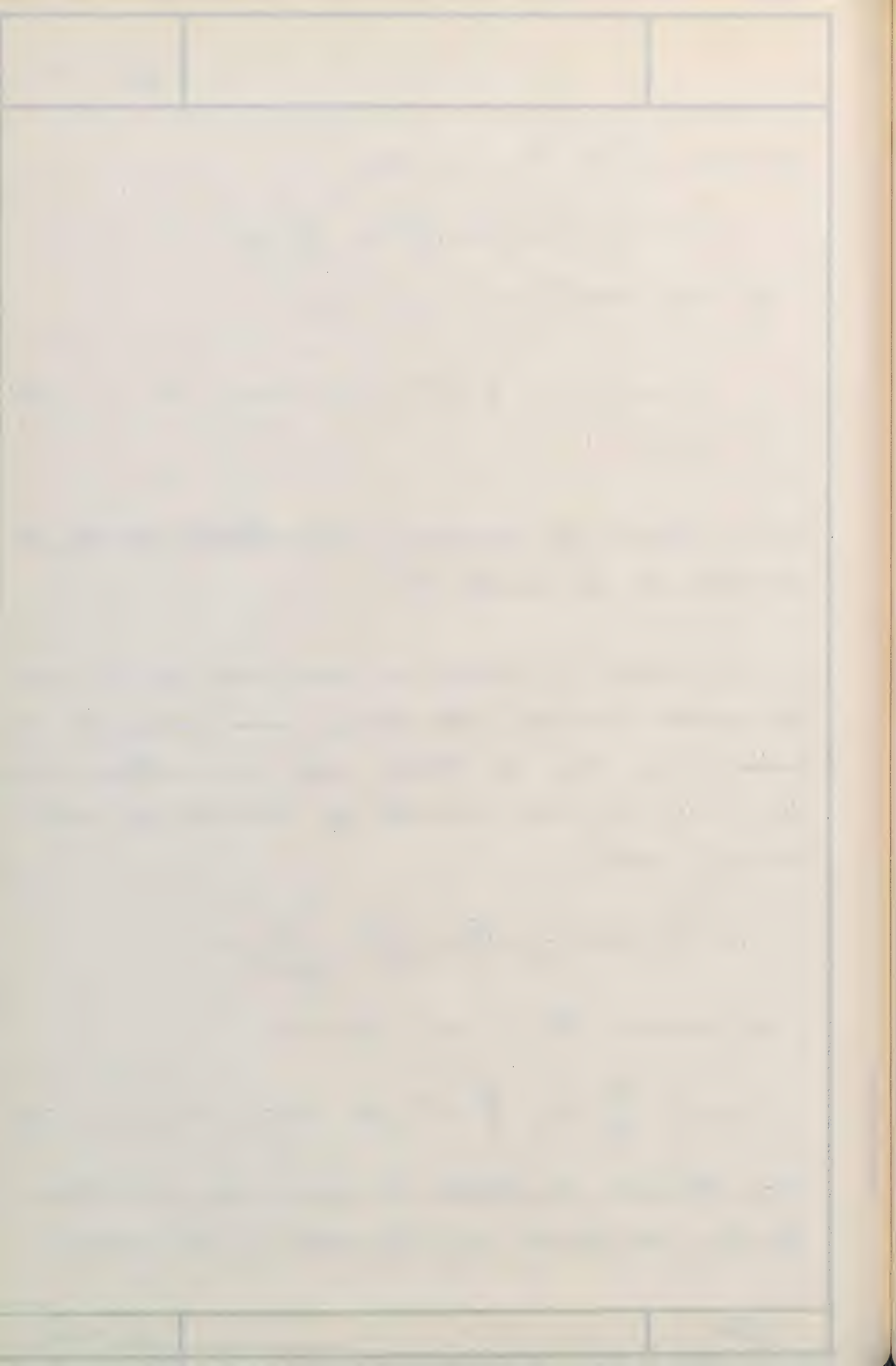
Si unimos los vértices de una cara con el centro del poliedro regular, obtendremos una pirámide regular, cuya base es dicha cara y su altura el radio c de la esfera inscrita al octaedro; su volumen V_1 valdrá:

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1\, c = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \times \frac{\sqrt{6}}{6} l = \frac{\sqrt{2}}{24} l^3$$

y el volumen total V, será igual a

$$V = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{24} l^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} l^3 = 0,47\ 14\ 05 \ldots\ l^3 = (2, \widehat{8,4}) \ldots \qquad [38]$$

12.4 Resumen del cálculo de magnitudes del octaedro regular, en función de la arista "l" del mismo



A continuación exponemos en forma tabulada los resultados de los cálculos desarrollados en los párrafos 12.21 a 12.24 y 12.31 a 12.34 cuya nomenclatura es la siguiente:

<u>a</u> Radio de la esfera circunscrita (párrafo 12.21, fórmula 29)

<u>b</u> Radio de la esfera tangente a las aristas (párrafo 12.22, fórmula 30)

<u>c</u> Radio de la esfera inscrita (párrafo 12.23, fórmula 32)

<u>d</u> Radio de la esfera circunscrita a una cara (párrafo 12.23, fórmula 31).

<u>2φ</u> Ángulo del diedro (párrafo 12.24, fórmula 33)

<u>k</u> Apotema de una cara (párrafo 12.31, fórmula 34)

Relaciones entre magnitudes (párrafo 12.32, fórmulas 35 y 36)

<u>S</u> Superficie (párrafo 12.33, fórmula 37)

<u>V</u> Volumen (párrafo 12.34, fórmula 38)

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,l$	$0,70\ 71\ 07\ldots\ l$
b	$\frac{1}{2}\,l$	$0,50\ 00\ 00\ldots\ l$
c	$\frac{\sqrt{6}}{6}\,l$	$0,40\ 82\ 48\ldots\ l$
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\,l$	$0,57\ 73\ 50\ldots\ l$
2φ	$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$	$0,81\ 64\ 97\ldots$ $2\varphi = 109^\circ\ 28'\ 16,6''$
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\,l$	$0,28\ 86\ 75\ldots\ l$
S	$2\sqrt{3}\,l^2$	$3,46\ 41\ 02\ldots\ l^2$
V	$\frac{\sqrt{2}}{3}\,l^3$	$0,47\ 14\ 05\ldots\ l^3$

Relaciones entre magnitudes	
$d = 2k$	$l = 2b$

UNE A4 210 X 297

Págs.

91 al 100

12.5 Representación en el sistema diédrico del octaedro regular de lado "l" dado, por proceso gráfico-analítico.

12.51 Ejercicio de aplicación

ENUNCIADO.- Representar en el Sistema diédrico con tres proyecciones y a escala 1:2.5, un octaedro regular de 134.5 mm de arista, de forma que una de sus caras sea perpendicular al plano I y una diagonal del mismo, perpendicular al plano II. El centro $\bar{O}$ del octaedro tiene por coordenadas reales O (120, 120, 150) m.

SOLUCIÓN

Refiriéndonos a la figura 30, efectuaremos las siguientes construcciones y operaciones:

1ª Recuadrado del papel A4v (a 5 mm del borde), colocación del cajetín (ver párrafo 10.51) y situación de los ejes coordenados a las distancias marcadas en la figura (100 y 117 mm).

2ª Calcular, de acuerdo con el cuadro sinóptico incluido en el párrafo 12.4, las dimensiones en milímetros de las magnitudes a, b, c, d y k. Los resultados de estas operaciones, con una cifra decimal, son los siguientes: a = 95.1; b = 67.2; c = 54.9; d = 77.6; k = 38.8.

3ª Situar sobre el dibujo en sus tres proyecciones,

el centro del exaedro $\widehat{O}$, de acuerdo con sus coordenadas y escala.

4º Tomando como base de trazado los radios a = 95,1 y b = 67,2, dibujar los sencillos contornos (cuadrado y rombos) en sus tres proyecciones y comprobar con la escala graduada las magnitudes c = 54,9 y l = 134,5, así como la amplitud del ángulo 2φ (con el semicírculo graduado) que se obtiene en su verdadera magnitud en los planos $\widehat{I}$ ó $\widehat{III}$

5º Numerar sus vértices del 1 al 6 en sus tres vistas.

6º Acotar con cifras las dimensiones calculadas.

12.52 Desarrollo del octaedro regular

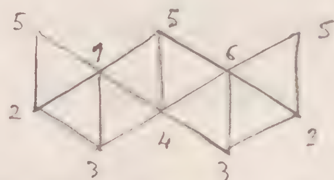


Figura 31

El desarrollo del octaedro regular (fig. 31) se compone de ocho triángulos equiláteros de lado $\widehat{l}$, colocados contiguamente y numerados (sus vértices) en el orden que se indica en la figura, que se corresponde a su vez con los de las figuras 29 y 30.

---

13 Dodecaedro regular

El dodecaedro regular se compone de doce caras, veinte vértices y treinta aristas. Las caras son pentágonos regulares.



Figura 32

Una perspectiva axonométrica del dodecaedro regular, acotada con las dimensiones que se fijan en el ejercicio del párrafo 13.51, está representada en la figura 32.

13.1 Representación en el Sistema diédrico del dodecaedro regular de lado "l" dado, por proceso exclusivamente gráfico.

La representación la efectuaremos en los planos I, II y III. Para ello situaremos el dodecaedro con una de sus caras (inferior) paralela al plano II y una arista de dicha cara perpendicular al eje +X. Los vértices se numerarán del 1 al 12.

No tendremos en cuenta las distancias relativas a que se encuentra el dodecaedro con respecto a los planos de proyección, ni la magnitud del lado "l" que queda a libre elección.

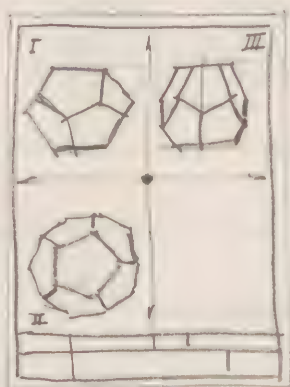


Figura 33

Refiriéndonos a la figura 33, efectuaremos las siguientes construcciones geométricas:

1° Situar previamente los ejes coordenados +X, +Y, +Z.

2° Construir en el plano II el pentágono regular 16-17-18-19-20 de

forma que el lado $\overline{16\text{-}20}$ sea perpendicular a +X (vea figura P.G. 335d).

3º Trazar la circunferencia circunscrita al pentágono anterior y bisecar los ángulos centrales, con lo que se obtendrá el nuevo pentágono $\overline{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4\text{-}5}$ (cara superior)

4º Construir un nuevo pentágono regular contiguo al lado $\overline{16\text{-}20}$ abatido sobre $\overline{II}$ y hacerlo girar alrededor del lado $\overline{16\text{-}20}$ hasta obtener el vértice $\overline{15}$ en la prolongación del radio $\overline{0\text{-}16}$.

5º La circunferencia de centro $\overline{0}$ y radio $\overline{0\text{-}15}$ contiene los vértices del contorno de la vista $\overline{II}$, que forman un decágono regular inscrito de lado $\overline{i}$. Dichos vértices se obtienen trazando los radios $\overline{0\text{-}1 \ldots 0\text{-}5}$ y $\overline{0\text{-}16 \ldots 0\text{-}20}$.

6º La proyección sobre $\overline{I}$ se obtiene determinando primero la posición de la cara $\overline{16\text{-}17\text{-}18\text{-}19\text{-}20}$ (base) que será una recta paralela a $\overline{+X}$, y a continuación la de la cara girada $\overline{14\text{-}9\text{-}15\text{-}16\text{-}20}$ que será otra recta cuyos vértices se corresponden en $\overline{I}$ y $\overline{II}$. Con esto se obtiene el diedro $\overline{24}$ y el centro $\overline{0}$ del poliedro en el plano $\overline{I}$ lo que permite construir fácilmente el contorno y proyección sobre $\overline{I}$.

7º La proyección sobre $\overline{III}$ se determina fácilmente después de dibujadas las $\overline{I}$ y $\overline{II}$.

13.2 Cálculo de las magnitudes fundamentales del dodecaedro regular, en función de la arista "l" del mismo.

Siguiendo el criterio establecido en el párrafo 9.1, determinaremos analíticamente las siguientes magnitudes

13.21 Cálculo del radio "a" de la esfera circunscrita al dodecaedro regular, en función de la arista "l".

Considerando un ángulo sólido del mismo, concurren en él tres pentágonos regulares de lado $\widehat{l}$ y tres aristas también iguales a $\widehat{l}$, cuyos extremos forman a su vez un triángulo equilátero de lado igual a la diagonal del pentágono.

El radio $\widehat{d}$ de la circunferencia circunscrita a un pentágono de lado $\widehat{l}$, según enseña la Geometría métrica, vale

$$d = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l = 0,85\,06\,51 \ldots l = \qquad [39]$$

El valor de la diagonal $\widehat{p}$ de dicho pentágono regular tiene la expresión, en función de d

$$p = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\, d \qquad [40]$$

y el radio $\widehat{m}$ de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero de lado $\widehat{p}$, es de

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3}\, p \qquad [41]$$

sustituyendo en [41] el valor de $\widehat{p}$ según [40] y a su vez en ésta el de $\widehat{d}$ según [39], tendremos:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2} \times \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \times l = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}\, l = 0{,}93\ 41\ 72 \ldots l \qquad [42]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2} \times \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{\sqrt{10}}\, l = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2 \times (5 + \sqrt{5}) \times (5 + \sqrt{5})}}{6\sqrt{10}}\, l =$$

$$= \frac{(5 + \sqrt{5}) \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}}{6\sqrt{10}}\, l = \frac{(5 + \sqrt{5}) \times \sqrt{6} \times \sqrt{10}}{60}\, l = \frac{(5 + \sqrt{5}) \times \sqrt{60}}{60}\, l =$$

$$= \frac{(5 + \sqrt{5}) \times 2 \times \sqrt{15}}{60}\, l = \frac{(5 + \sqrt{5}) \times \sqrt{15}}{30}\, l = \frac{5\sqrt{15} + \sqrt{5 \times 15}}{30}\, l =$$

$$= \frac{5\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{30}\, l = \boxed{\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}\, l = m} =$$

Sustituyendo en la fórmula [1] (ver párrafo 9.1), el valor obtenido para $\widehat{m}$ [42], tendremos:

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}\, l\right)^2}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, l = 1{,}40\ 12\ 59 \ldots l \qquad [43]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}\, l\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}\right)^2}}\, l = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{15 + 3 + 2\sqrt{45}}{36}}}\, l =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{18+6\sqrt{5}}{36}}}\, l = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{3+\sqrt{5}}{6}}}\, l = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}}\, l =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}}{2\times\frac{3-\sqrt{5}}{6}}\, l = \frac{3\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}}{3-\sqrt{5}}\, l = \frac{3\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}\times(3+\sqrt{5})}{4}\, l =$$

$$= \frac{3\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{6}}}{4}\, l = \frac{3\sqrt{\frac{4(3+\sqrt{5})}{6}}}{4}\, l = \frac{6\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}}{4}\, l = \frac{6\times\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{6}}}{4}\, l = \circledast$$

$$= \frac{6\times\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}}}{4}\, l = \frac{6\times\left(\sqrt{\frac{5}{12}}+\sqrt{\frac{1}{12}}\right)}{4}\, l = \frac{\sqrt{\frac{36\times 5}{12}}+\sqrt{\frac{36}{12}}}{4}\, l =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, l}$$

$\circledast$

NOTA IMPORTANTE. - La transformación del radical $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ así como otras análogas que utilizaremos posteriormente está basada en la siguiente propiedad que demostramos a continuación:

"Todo radical de la forma $\sqrt{m \pm n}$ se puede descomponer" "en dos sumandos de la forma $\sqrt{c} \pm \sqrt{d}$, y $\underline{c}$ y $\underline{d}$ serán nú-" "meros racionales siempre que $m^2 - n^2$ sea un cuadrado perfecto."



En efecto, de la igualdad $(p \pm q)^2 = p^2 + q^2 \pm 2pq$, se obtiene, haciendo $p = \sqrt{c}$ y $q = \sqrt{d}$

$$\left(\sqrt{c} \pm \sqrt{d}\right)^2 = c + d \pm 2\sqrt{cd},$$ de donde

$$\sqrt{c} \pm \sqrt{d} = \sqrt{c + d \pm 2\sqrt{cd}} \qquad (I)$$

Si en la igualdad anterior (I) hacemos $c + d = m$ y $2\sqrt{cd} = n$, se verificará que

$$\sqrt{c} \pm \sqrt{d} = \sqrt{m \pm n} \qquad (II)$$

lo cual nos demuestra la posibilidad de la transformación que afirma la primera parte del enunciado.

Para que se pueda efectuar la igualdad (II) con números racionales, procederemos como sigue:

El sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} c + d = m \\ 2\sqrt{cd} = n \end{array} \right\}$ equivalente al $\left\{ \begin{array}{l} c + d = m \\ cd = \dfrac{n^2}{4} \end{array} \right\}$

tiene como solución

$$(m - d)\,d = \frac{n^2}{4} \quad \therefore \quad md - d^2 = \frac{n^2}{4} \quad \therefore \quad d^2 - md + \frac{n^2}{4} = 0$$

de donde $$d = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4 \times \frac{n^2}{4}}}{2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - n^2}}{2} \qquad (III)$$

y $$c = m - d = m - \frac{m \pm \sqrt{m^2 - n^2}}{2} = \frac{m \mp \sqrt{m^2 - n^2}}{2}. \qquad (IV)$$

es decir, que los valores de "c" y "d" deducidos en (IV) y (III) respectivamente, serán números racionales siempre y cuando $m^2 - n^2$ sea un cuadrado perfecto, según se quería demostrar.

En el desarrollo de cálculo de la hoja nº 97, establecíamos el paso $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$, ya que haciendo $m = 3$ y $n = \sqrt{5}$, se verifica que $m^2 - n^2 = 9 - 5 = 4$, cuadrado perfecto, y por consiguiente, se obtendrá según (III) y (IV)

$$d = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - n^2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad y$$

$$c = \frac{m \mp \sqrt{m^2 - n^2}}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{4}}{2} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{Bmatrix}$$

y que según (II) se verifica para el radical positivo

$$\sqrt{c} \pm \sqrt{d} = \sqrt{m \pm n} \qquad \text{o sea} \qquad \sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$$

y también se verificaría para el radical negativo

$$\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$



13.22 Cálculo del radio "b" de la esfera tangente a las aristas del dodecaedro regular, en función de su arista "l"

Según la fórmula [3] deducida en el párrafo 9.1, y la [43] del párrafo 13.21, tendremos:

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\,l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}\,l = 1{,}30\;90\;17\ldots\,l \qquad [44]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\,l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{15+3+2\sqrt{45}}{16} - \frac{1}{4}} \times l = \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{4}} \times l =$$

$$= \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}-2}{8}} \times l = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{8}} \times l \overset{*}{=} \frac{\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{8}} \times l = \left(\sqrt{\frac{9}{16}}+\sqrt{\frac{5}{16}}\right) l =$$

---

* Este paso es aplicación del Teorema expresado en el párrafo 13.21 (págs. 97 a 99), y tiene el siguiente desarrollo:

en el radical $\sqrt{7+3\sqrt{5}}$ vemos que $7^2 - 3^2 \times 5 = 49 - 45 = 4$ es un cuadrado perfecto, por lo que haciendo $m = 7$ y $n = 3\sqrt{5}$

$$d = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - (3\sqrt{5})^2}}{2} = \begin{cases} \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{cases}$$

de donde

$$\sqrt{7+3\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$c = \frac{7 \mp \sqrt{7^2 - (3\sqrt{5})^2}}{2} = \begin{cases} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{7-3\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Págs.

101 al 110

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \right) l = \boxed{\frac{3+\sqrt{5}}{4} \, l}$$

13.23 Cálculo del radio "c" de la esfera inscrita en el dodecaedro regular, en función de su arista "l"

Según hemos visto en el párrafo 13.21, fórmula [37], el valor $\widehat{d}$ del radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular, en función de su lado $\widehat{l}$, es

$$d = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \, l$$

valor que sustituido en la fórmula [2] del párrafo 9.1 junto con el $\widehat{a}$, calculado en el párrafo 13.21, nos da

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} l \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \, l \right)^2} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}} \, l =$$

$$= 1.113516\ldots l \qquad [45]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} l \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \, l \right)^2} = \sqrt{\frac{15+3+2\sqrt{45}}{16} - \frac{5+\sqrt{5}}{10}} \, l =$$

$$= \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{8} - \frac{5+\sqrt{5}}{10}} \, l = \sqrt{\frac{45+15\sqrt{5}-20-4\sqrt{5}}{40}} \, l = \boxed{\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}} \, l}$$

13.24 Cálculo del ángulo "2φ" del diedro formado por dos caras contiguas del dodecaedro regular.

Para el cálculo del diedro $\widehat{2\varphi}$ formado por dos caras

conseguimos, aplicaremos directamente la fórmula [6], deducida en el párrafo 9.1, función de las magnitudes $\hat{b}$ y $\hat{c}$ obtenidas en 13.22 y 13.21 respectivamente.

$$\text{sen } \varphi = \frac{c}{b} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\, l : \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = 0{,}85\,06\,50\,8\ldots$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\, l : \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l = \frac{4\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}}{3+\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}\times(3-\sqrt{5})^2}}{4} =$$

$$= \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)\times(9+5-6\sqrt{5})}{40}} = \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)\times(7-3\sqrt{5})}{20}} =$$

$$= \sqrt{\frac{77\sqrt{5}+175-165-75\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}+10}{20}} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}}$$

de cuyo valor se deduce $\varphi = 58^\circ\ 16'\ 57{,}1''$

de donde: $2\varphi = 116^\circ\ 33'\ 54{,}2''$ [46]

El desarrollo del cálculo logarítmico es el siguiente:

$\text{sen } \varphi = 0{,}85\,06\,508$ $\quad \log. \text{ sen } \varphi = \bar{1},929\,75\,14$

$$\text{sen } \varphi = 58^\circ\ 16'\ 57{,}1''$$

Como valores complementarios que utilizaremos en cál-
(sigue a la vuelta)

13.3 Cálculo de las magnitudes especiales del dodecaedro regular, en función de su arista "l".

culos posteriores, tenemos

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{5 + \sqrt{5}}{10}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$$

y

$$\operatorname{sen} 2\varphi = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = 2 \times \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} =$$

Dentro de este grupo estudiaremos las magnitudes siguientes:

13.31 Cálculo del radio "e" de la circunferencia circunscrita a un decágono regular, conocido el radio "b" de la circunferencia inscrita al mismo (que es a su vez el radio de la esfera tangente a las aristas del dodecaedro) en función de su arista "l"

Según se estudia en la geometría métrica, y teniendo en cuenta la fórmula [44] del párrafo 13.22 tendremos que

$$b = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\, e \qquad \text{de donde}$$

$$e = \frac{4b}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{4 \times \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\; l = 1.37\,63\,84 \ldots l \qquad [47]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

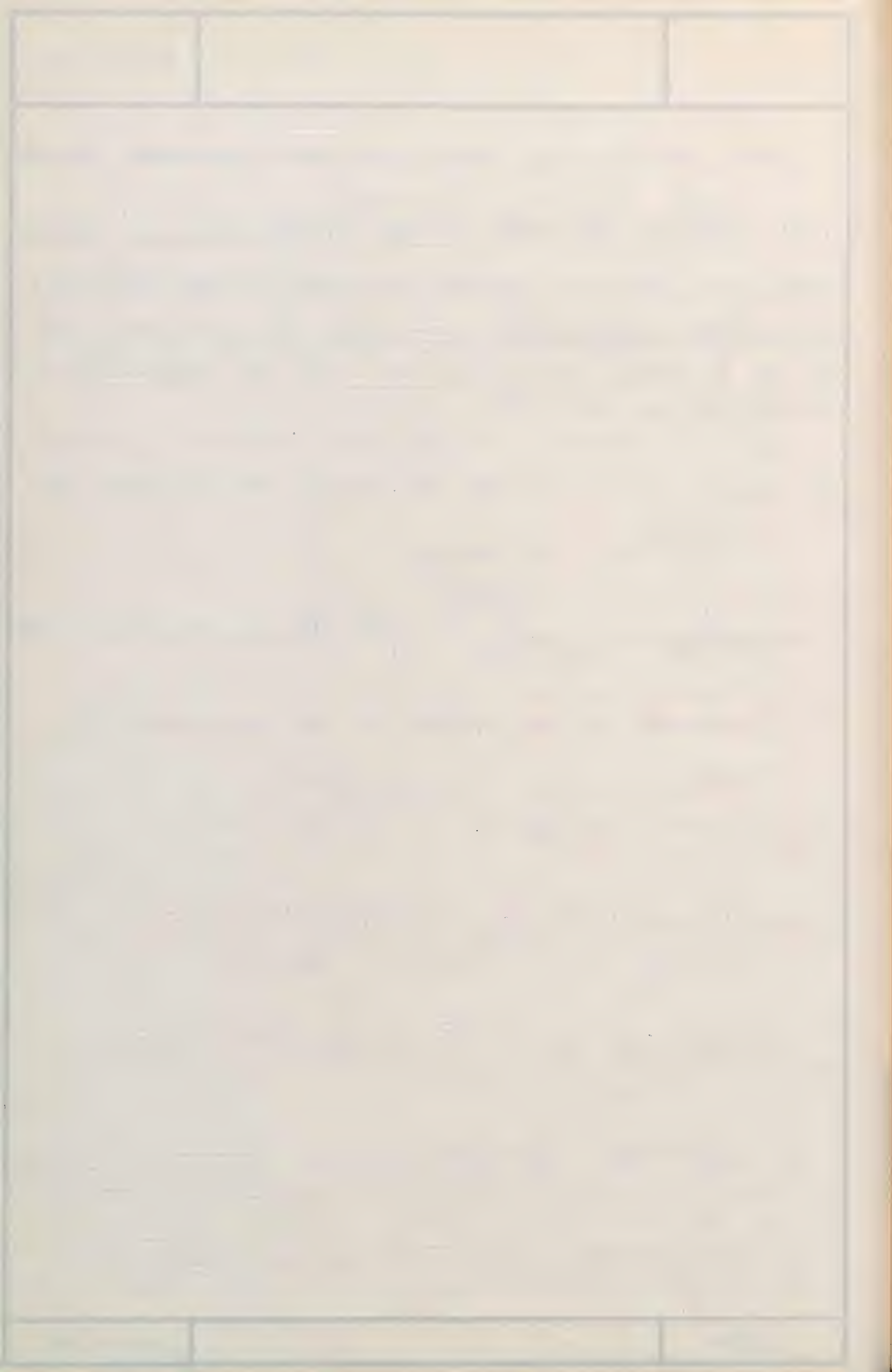
$$\frac{4 \times \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\, l = \frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10 + 2\sqrt{5}}\, l =$$

$$= \frac{(3+\sqrt{5})(10 - 2\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{80}\, l = \frac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{40}\, l =$$

$$= \frac{(15 + 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 5)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{40}\, l = \frac{(10 + 2\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{40}\, l =$$

$$= \frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{20}\, l = \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5}) \times 2 \times (5+\sqrt{5})^2}}{20}\, l = \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5}) \times 2 \times (25 + 5 + 10\sqrt{5})}}{20}\, l$$

$$= \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})(15+5\sqrt{5})}}{10}\, l = \frac{\sqrt{75 + 15\sqrt{5} + 25\sqrt{5} + 25}}{10}\, l = \sqrt{\frac{100 + 40\sqrt{5}}{100}}\, l =$$



$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ \ell}$$

13.32 Cálculo de la apotema "k" de una cara del dodecaedro regular, en función de su arista "l"

La Geometría métrica nos enseña que (ver fórmula [39]

$$k = \sqrt{d^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ \ell = 0.68\,81\,92\ldots \ell \quad [48]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{4}}\ \ell = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}-5}{20}}\ \ell =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ \ell}$$

13.33 Cálculo de la magnitud "g" en las vistas "I" y "III"

Refiriéndonos a la figura 33, podemos observar en la vista $\widehat{III}$ que la cota $\widehat{g}$ es la distancia (altura) a que se encuentran los vértices $\overline{11, 12, 13, 14, 15}$ del plano de la cara inferior $\overline{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}$ (base); dicha distancia es la misma que existe entre los vértices $\overline{6, 7, 8, 9, 10}$ y la cara opuesta $\overline{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$.

Consideremos las dos caras contiguas $\overline{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}$ y la $\overline{9 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 14}$ con su arista común $\overline{16 \cdot 20}$. El diedro formado por ellas es 2φ (ver párrafo 13.24).

Aislando estas dos caras contiguas del resto del poliedro, en sus proyecciones sobre $\widehat{I}$ y $\widehat{II}$ obtendremos la representación de la figura 34, en la que la cara $\overline{9 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 14}$ supuesta primitivamente colocada en el plano de la cara contigua $\overline{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}$ ha sido girada alrededor de la arista común $\overline{16 \cdot 20}$ hasta formar el ángulo 2φ.

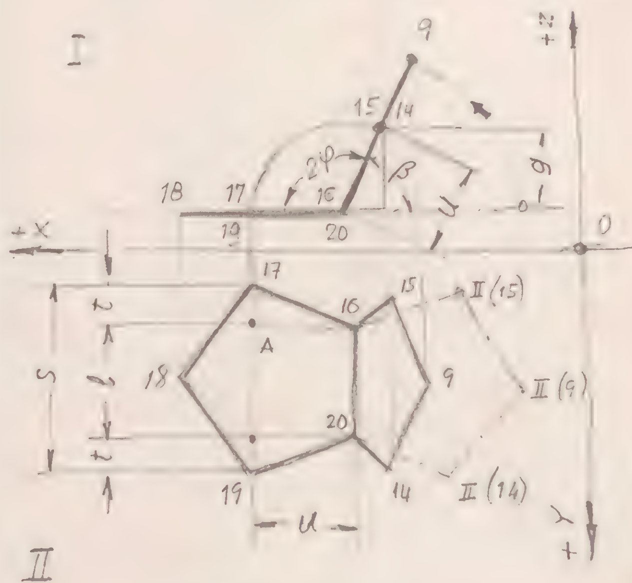


Figura 34

La magnitud $\overline{g}$ buscada, es función de las $\widehat{s}$, $\widehat{t}$, $\widehat{u}$, que previamente determinamos

1° Magnitud "s"

Es la diagonal de un pentágono regular de lado $\widehat{l}$, cuyo valor, según nos enseña la Geometría métrica, es

$$s = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l \qquad [V]$$

2° Magnitud "t"

De la figura 34 se deduce:

$$t = \frac{s-l}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}l - l}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\, l \qquad [VI]$$

3° Magnitud "u"

Es un cateto del triángulo rectángulo $\overline{17 \cdot A \cdot 16}$ de hipotenusa $\widehat{l}$ y el otro cateto $\widehat{t}$; por consiguiente será:



$$u = \sqrt{\ell^2 - t^2} = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,\ell \qquad [VII]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\ell\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}}\,\ell = \sqrt{1 - \frac{5+1-2\sqrt{5}}{16}}\,\ell = \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}}\,\ell =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{3-\sqrt{5}}{8}}\,\ell = \sqrt{\frac{8-3+\sqrt{5}}{8}}\,\ell = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,\ell}$$

Con estos datos previos, podremos determinar finalmente el valor de "g" como proyección de $\widehat{I(u)}$ sobre el el eje $\widehat{+Z}$, por lo que se verificará:

$$\overline{g = u\ (\text{sen}\ \beta)}$$

mas siendo, $\text{sen}\ \beta = \text{sen}\ 2\varphi$ y conocido el valor $\hat{u}$ [VII] obtendremos, sustituyendo valores (ver párrafo 13.24)

$$g = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}\,\ell = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell = 0{,}85\,06\,51\ldots\,\ell \qquad [49]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}\,\ell = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})\times 20}{8\times 25}}\,\ell = \sqrt{\frac{100+20\sqrt{5}}{200}}\,\ell = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell}$$

OBSERVACIONES.

Al realizar el estudio del cálculo de la magnitud "g" seguimos primeramente otro camino diferente al expuesto en este párrafo, que



siendo mucho más laborioso que éste, nos condujo al mismo resultado numérico, aún cuando la fórmula final surgió de manera intuitiva, según exponemos a continuación.

El proceso de cálculo es análogo al del segundo estudio y consiste en esencia en obtener la proyección del segmento $\widehat{I(9\cdot20)}$ ó su igual $\widehat{I(9\cdot16)}$ sobre el eje $\widehat{+Z}$ (figs 33 y 34).

Refiriéndonos a la figura 34, podemos establecer la longitud del segmento $I(9\cdot20)$ (ó $I(9\cdot16)$) como suma de los segmentos $\widehat{k}$ y $\widehat{d}$ (fig. 33), y su proyección sobre el eje $\widehat{+Z}$ como suma de los $\widehat{g}$ y $\widehat{f}$ (fig. 33) por lo que se verificará que

$$g + f = (k + d)\ \text{sen}\ \beta \qquad (\text{VIII})$$

pero por otra parte también se verificará (fig. 33) que

$$2g + f = 2c \qquad (\text{VIX})$$

en las ecuaciones $\widehat{\text{VIII}}$ y $\widehat{\text{VIX}}$ son ya conocidas las magnitudes $\widehat{k}$, $\widehat{d}$, $\widehat{c}$ y $\widehat{\text{sen}\ \beta}$, e incógnitas las $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$, es decir que tenemos con ambas un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que es resoluble.

Siendo $k = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ l$ (ver fórmula [48], $d = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l$ (ver fórmula [39]) y $\text{sen}\ \beta = \text{sen}\ 2\varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (ver párrafo 13.24), y sustituyendo estos valores en $\widehat{\text{VIII}}$, tendremos



$$g+f = \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,l + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,l\right)\times\frac{2\sqrt{5}}{5} = \left[\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\times\frac{2\sqrt{5}}{5} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\right] l = \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}\times\frac{20}{25}} + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}\times\frac{20}{25}}\right) l =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{25}} + \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{25}}\right) l = \left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5}\right) l$$

Transformando la ecuación VIX

$$2g+f = 2c \quad ,, \quad g+(g+f) = c, \quad g = c-(g+f)$$

y sabiendo que $\hat{c}$ tiene el valor (ver fórmula [45])

$$c = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\; l$$

tendremos finalmente

$$g = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{4}}\,l - \left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5}\right) l =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{4}} - \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5}\right) l \qquad (X)$$

Fórmula final obtenida para $\hat{g}$ que en principio resulta algo compleja, y que intentamos simplificar sin éxito.

Al no conseguirlo, procedimos al cálculo numérico del coeficiente de $\hat{l}$ (expresión entre paréntesis en X), que detallamos a continuación:

$$\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{4}} = 2.2270327\ldots$$

$$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} = 0,6155367\ldots$$

$$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5} = 0.7608452\ldots$$

de donde $g = (2.2270327 - 0,6155367 - 0,7608452)\,l$

$= 0,8506508\ldots\, l$

Obtenido este resultado, nos sorprendió su total coincidencia con el obtenido para el valor de la magnitud $\widehat{d}$ (ver fórmula [39]), radio de la circunferencia circunscrita al pentágono de lado $\widehat{l}$, lo que nos indujo a tratar de demostrar la igualdad

$$g = d$$

o lo que es igual, que se verifique

$$\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{4}} - \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = g$$

lo cual supone una notable simplificación para la obtención del valor de $\widehat{g}$.

Para ello realizamos los cálculos que se detallan a continuación para averiguar si la igualdad anterior conduce a una identidad, como así ha su-

cedido, ya que

$$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} - \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

$$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{25}} - \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{25}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{25}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{25}}\right)^2$$

$$\frac{25+11\sqrt{5}}{10} + \frac{5+2\sqrt{5}}{25} - 2\times\sqrt{\frac{(25\times 11\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{10\times 25}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{10+2\sqrt{5}}{25} + 2\times\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{10\times 25}}$$

$$\frac{25+11\sqrt{5}}{10} - \frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5+2\sqrt{5}}{25} - \frac{10+2\sqrt{5}}{25} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{10}} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{10}}$$

$$\frac{20+10\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\left[\sqrt{\frac{2\times(5+\sqrt{5})^2}{10}} + \sqrt{\frac{125+55\sqrt{5}+50\sqrt{5}+110}{10}}\right]$$

$$\left(2+\sqrt{5}-\frac{1}{5}\right)\times\frac{5}{2} = (5+\sqrt{5})\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{\frac{235+105\sqrt{5}}{10}}$$

$$\frac{9+5\sqrt{5}}{2} = \frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{5}}{5} + \sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{2}} \quad „ \quad \frac{9+5\sqrt{5}}{2} = \frac{5\sqrt{5}+5}{5} + \sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{2}}$$

$$\frac{9+5\sqrt{5}}{2} - (\sqrt{5}+1) = \sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{2}} \quad „ \quad \frac{9+5\sqrt{5}-2(\sqrt{5}+1)}{2} = \sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{2}} \quad „$$

$$\frac{9+5\sqrt{5}-2\sqrt{5}-2}{2} = \sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{2}} \quad „ \quad \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{47+21\sqrt{5}}{2} \quad „$$

$$\frac{(7+3\sqrt{5})^2}{4} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2} \quad „ \quad \frac{49+45+42\sqrt{5}}{4} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{94+42\sqrt{5}}{4} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2} \quad „ \quad \boxed{\frac{47+21\sqrt{5}}{2} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2}}$$

identidad final

q. e. q. d.

Págs.

111 al 120

13.34 Cálculo de la magnitud "f" en las vistas "I" y "III"

Refiriéndonos a la figura 33, podemos observar en la vista III que la cota f, en función de c y g, tiene la siguiente relación:

$$2c = 2g + f \qquad \text{de donde} \qquad f = 2c - 2g$$

siendo (ver fórmula [45]) $\quad 2c = 2 \times \sqrt{\dfrac{11\sqrt{5} + 25}{40}}\, l = \sqrt{\dfrac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}\, l$

y a su vez (ver fórmula [49]) $\quad 2g = 2 \times \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{10}}\, l = \sqrt{\dfrac{10 + 2\sqrt{5}}{5}}\, l$

valores que sustituidos en la primera ecuación, nos da

$$f = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}\, l - \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}}\, l = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\, l = 0{,}52\ 57\ 31\ldots\, l \qquad [50]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}\, l - \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}}\, l = \sqrt{\left(\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10} + \frac{10 + 2\sqrt{5}}{5} - 2\sqrt{\frac{(25 + 11\sqrt{5})(10 + 2\sqrt{5})}{50}}\right) l^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5} + 20 + 4\sqrt{5}}{10} - \frac{2}{5} \times \sqrt{(25 + 11\sqrt{5})(10 + 2\sqrt{5})}}\; l =$$

$$= \sqrt{\frac{45 + 15\sqrt{5}}{10} - \frac{4\sqrt{125 + 55\sqrt{5} + 25\sqrt{5} + 55}}{10}}\; l = \sqrt{\frac{45 + 15\sqrt{5} - 4\sqrt{180 + 80\sqrt{5}}}{10}}\; l =$$

$$= \sqrt{\frac{45 + 15\sqrt{5} - 8\sqrt{45 + 20\sqrt{5}}}{10}}\; l = \sqrt{\frac{45 + 15\sqrt{5} - 8\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})^2}}{10}}\; l =$$

$$= \sqrt{\frac{45 + 15\sqrt{5} - 8(5 + 2\sqrt{5})}{10}}\; l = \sqrt{\frac{45 + 15\sqrt{5} - 40 - 16\sqrt{5}}{10}}\; l = \boxed{\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\; l}$$

13.35 Cálculo de la magnitud "i" lado del decágono regular del contorno de la vista "II".

La geometría métrica nos enseña que el lado $\widehat{l_{10}}$ de un decágono regular, en función del radio $\widehat{r}$ de su circunferencia circunscrita, tiene el valor

$$l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$$

siendo en nuestro caso $l_{10} = i$ $r = e$

en el cual el valor calculado de e (ver fórmula 47) es

$$e = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l$$

y sustituyendo valores, tendremos

$$i = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} l = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} l = 0.85\ 06\ 51 \ldots l \qquad [51]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} l = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} \times \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}} l = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{20}} l =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{10}} l = \sqrt{\frac{16+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{10}} l = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} l}$$

13.36 Relaciones importantes entre las magnitudes calculadas del dodecaedro regular

De las fórmulas [47] y [48] se deduce $e = 2k$ [52]

De las fórmulas [39], [49] y [51] se deduce $d = g = i$ [53]

De las fórmulas [49], [50] y [48] se deduce que

$$g + f = 2k \qquad [54]$$

ya que

$$2k = 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,l = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,l$$

y $g + f = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,l + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,l = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{2}}\,l$

El desarrollo de este último cálculo es el siguiente:

$$\boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}}\,l + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,l} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} + 2\times\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}\times\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}\;l =$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{100}}}\;l = \sqrt{1 + 2\times\sqrt{\frac{20}{100}}}\;l = \sqrt{1 + 2\times\frac{2\sqrt{5}}{10}}\;l =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}\;l = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\;l}$$

13.37 Cálculo de la superficie "S" del dodecaedro regular, en función de su arista "l"

El área S_1 de una cara será la de un pentágono regular de lado l y apotema k (ver fórmula [48])

$$S_1 = \frac{5}{2}l \times k = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\;l^2$$

y el área total S, será

$$S = 12 \times \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\;l^2 = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\;l^2 = 20{,}6457\,29\ldots\;l^2 \qquad [55]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$12 \times \frac{5}{2} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l^2 = 30 \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l^2 = 3\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5}) \times 10^2}{20}}\, l^2 =$$

$$= 3 \times \sqrt{\frac{500+200\sqrt{5}}{20}}\, l^2 = \boxed{3 \times \sqrt{25+10\sqrt{5}}\, l^2}$$

13.38 Cálculo del volumen "V" del dodecaedro regular, en función de su arista "l"

Si unimos los vértices de una cara con el centro del poliedro regular, obtendremos una pirámide regular, cuya base es dicha cara y su altura el radio $\hat{c}$ de la esfera inscrita al dodecaedro; su volumen $\widehat{V_1}$ valdrá: (ver fórmula [45])

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1\, c = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\, l^3$$

y el volumen total

$$V = 12 \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\, l^3 = \frac{7\sqrt{5}+15}{4}\, l^3 = 7,663119..\, l^3 \quad [56]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$12 \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}} \cdot l^3 = 10 \times \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})}{800}}\, l^3 =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})}{8}}\, l^3 = \sqrt{\frac{(10+4\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})}{16}}\, l^3 =$$

$$= \frac{\sqrt{250+100\sqrt{5}+110\sqrt{5}+220}}{4}\, l^3 = \frac{\sqrt{470+210\sqrt{5}}}{4}\, l^3 =$$

pero siendo $470^2 - (210\sqrt{5})^2 = 400 = 20^2$ (ver nota pá-

rrafo 13.21) $V = \frac{\sqrt{\frac{470+20}{2}} + \sqrt{\frac{470-20}{2}}}{4} \, l^3 = \frac{\sqrt{245} + \sqrt{225}}{4} \, l^3 =$

$= \frac{\sqrt{7^2 \times 5} + \sqrt{15^2}}{4} \, l^3 = \boxed{\frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \, l^3}$

13.4 Resumen del cálculo de magnitudes del dodecaedro regular, en función de la arista "l" del mismo.

A continuación exponemos en forma tabulada los resultados de los cálculos desarrollados en los párrafos 13.21 a 13.24 y 13.31 a 13.38, cuya nomenclatura es la siguiente:

a Radio de la esfera circunscrita (párrafo 13.21, fórmula 43)

b Radio de la esfera tangente a las aristas (párrafo 13.22, fórmula 44)

c Radio de la esfera inscrita (párrafo 13.23, fórmula 45)

d Radio de la circunferencia circunscrita a una cara (párrafo 13,21, fórmula 39)

2φ Ángulo del diedro (párrafo 13,24, fórmula 46)

e Radio de la circunferencia circunscrit. al decágono regular, contorno de la vista $\widehat{II}$ (párrafo 13.31, fórmula 47)

f Altura intermedia del contorno de las vistas I y $\widehat{III}$ (párrafo 13.34, fórmula 50)

g Alturas extremas del contorno de la vista I y III (párrafo 13.33, fórmula 49)

l Lado del decágono regular, contorno de la vista II (párrafo 13.35, fórmula 51)

k Apotema de una cara (párrafo 13.32, fórmula 48)

Relaciones entre magnitudes (párrafo 13.36, fórmulas 52, 53 y 54)

S Superficie (párrafo 13.37, fórmula 55)

V Volumen (párrafo 13.38, fórmula 56).



CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\,\ell$	$1,401259\ldots\,\ell$
b	$\frac{3+\sqrt{5}}{4}\,\ell$	$1,309017\ldots\,\ell$
c	$\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\,\ell$	$1,113516\ldots\,\ell$
d	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$0,850651\ldots\,\ell$
2φ	$\operatorname{sen}\varphi=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	$0,850651\ldots$ $2\varphi=116^\circ\,33'\,54,2''$
e	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell$	$1,376382\ldots\,\ell$
f	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$0,525731\ldots\,\ell$
g	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$0,850651\ldots\,\ell$
i	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$0,850651\ldots\,\ell$
k	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,\ell$	$0,688191\ldots\,\ell$
S	$3\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,\ell^2$	$20,645729\ldots\,\ell^2$
V	$\frac{7\sqrt{5}+15}{4}\,\ell^3$	$7,663119\ldots\,\ell^3$

Relaciones entre magnitudes

$e = 2k$ $\quad$ $d = g = i$ $\quad$ $g + f = 2k$

13.5 Representación en el sistema diédrico del dodecaedro regular de lado "l" dado, por proceso gráfico-analítico.

13.51 Ejercicio de aplicación.

ENUNCIADO.- Representar en el Sistema diédrico con tres proyecciones y a escala 1:2,5, un dodecaedro regular de 67,9 mm de arista, de forma que una de sus caras (inferior) sea paralela al plano II y una arista de dicha cara, perpendicular al eje +X. El centro O del dodecaedro tiene por coordenadas reales O(120, 120, 150) mm.

SOLUCIÓN

Refiriéndonos a la figura 33, efectuaremos las siguientes construcciones y operaciones:

1º Recuadrado del papel A4v (a 5 mm del borde), colocación del cajetín (ver párrafo 10.51) y situación de los ejes coordenados a las distancias marcadas en la figura (100 y 117 mm).

2º Calcular, de acuerdo con el cuadro sinóptico incluido en el párrafo 13.4, las dimensiones en milímetros de las magnitudes a, b, c, d, e, f, g, i, k. Los resultados de estas operaciones, con una cifra decimal, son los siguientes: a = 95,1; b = 88,8; c = 75,6; d = 57.7; e = 93,4; f = 35,7; g = 57.7; i = 57.7; k = 46.7.

3º Situar sobre el dibujo en sus tres proyecciones, el

centro $\widehat{O}$, de acuerdo con sus coordenadas y escala.

4.ª Tomando como base las cotas calculadas construir directamente sus proyecciones sobre $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ y $\widehat{III}$, comprobando con sencillas construcciones geométricas los resultados gráficos (igualdad de divisiones en las circunferencias circunscritas a los polígonos regulares cuyo lado se conoce previamente). Comprobar igualmente la amplitud del ángulo 2Ψ (con el semicírculo graduado) que se obtiene en su verdadera magnitud en la vista $\widehat{I}$.

5.ª Numerar sus vértices 1 al 20 en sus tres vistas.

6.ª Acotar con cifras las dimensiones calculadas.

13.52 Desarrollo del dodecaedro regular

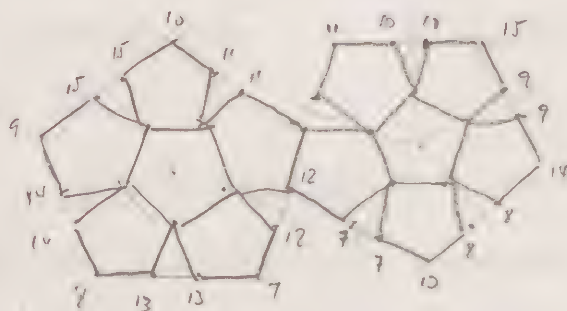


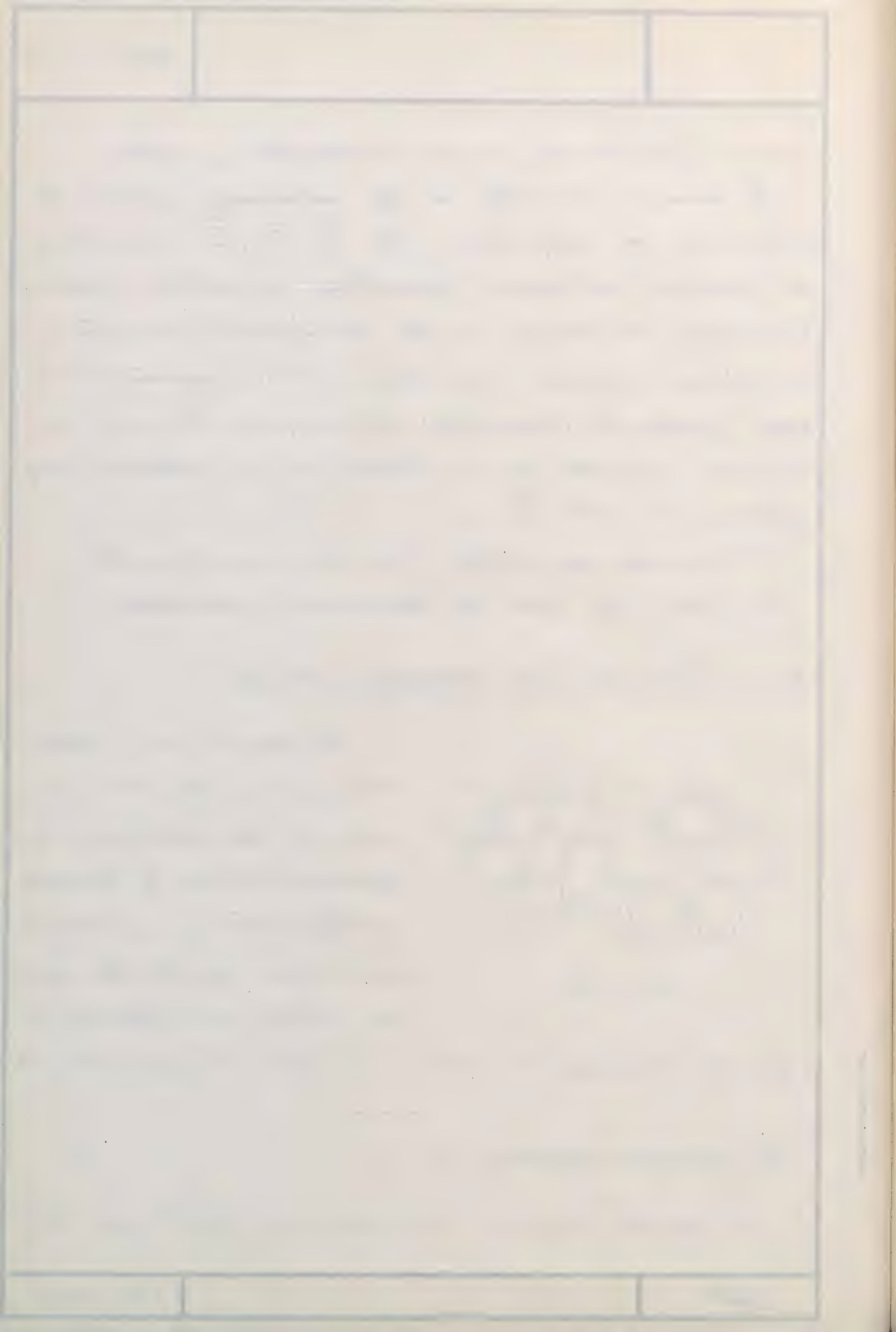
Figura 35

El desarrollo del dodecaedro regular (fig. 35) se compone de doce pentágonos regulares de lado $\widehat{\ell}$, colocados contiguamente y numerados sus vértices en el orden que se indica en la figura 35, que se corresponde a su vez con los de las figuras 33 y 34.

---

14 Icosaedro regular

El icosaedro regular se compone de $\widehat{\text{veinte caras}}$, doce



vértices y treinta aristas. Las caras son triángulos equiláteros.



Una perspectiva axonométrica del icosaedro regular, acotada con las dimensiones que se fijan en el ejercicio 14.51, está representada en la figura 36.

Figura 36

14.1 Representación en el Sistema diédrico del icosaedro regular de lado "l" dado, por proceso exclusivamente gráfico.

La representación la efectuaremos en los planos I, II y III. Para ello situaremos el icosaedro con un eje (diámetro de la esfera circunscrita) perpendicular a II y una de las cinco caras con vértice en un extremo de dicho eje, perpendicular a I. Los vértices se numerarán del 1 al 12.

No tendremos en cuenta las distancias relativas a que se encuentra el icosaedro con respecto a los planos de proyección, ni la magnitud del lado l que queda a libre elección.



Figura 37

Refiriéndonos a la figura 37, efectuaremos las siguientes construcciones geométricas:

1º Situar previamente los ejes coordenados +X, +Y, +Z.

Págs.

121 al 130

2º Construir en el plano II el pentágono regular 7-8-9-10-11 de forma que el lado 8-9 sea perpendicular a +X (ver ficha P.G. 2354).

3º Trazar la circunferencia circunscrita al pentágono anterior y bisecar los ángulos centrales, con lo que se obtendrá el nuevo pentágono 2-3-4-5-6, así como el contorno de la vista II. Los radios de ambos pentágonos completan la proyección sobre II, debiendo tenerse en cuenta su visibilidad.

4º La proyección sobre I se obtiene determinado previamente la posición de la cara I(8-9-12), mediante el giro de la cara abatida II(8-9-12), alrededor de un eje perpendicular a I que pase por 12 y que al mismo tiempo nos sirve para determinar la posición del centro I(0) de la esfera circunscrita. Conocida la posición del centro 0 y la proyección del icosaedro sobre II, el trazado completo de la vista I, es inmediato. El diedro 2φ se proyecta en su verdadera magnitud en el ángulo I(12-9-3) y también en el opuesto I(1-6-11).

5º La proyección sobre III se determina fácilmente después de dibujadas las I y II.

14.2 Cálculo de las magnitudes fundamentales del icosaedro regular, en función de la arista "l" del mismo.

Siguiendo el criterio establecido en el párrafo 9.1, determinaremos analíticamente las siguientes magnitudes.

14.21 Cálculo del radio "a" de la esfera circunscrita al icosaedro regular, en función de su arista "ℓ"

Considerando un ángulo sólido del mismo, concurren en él cinco triángulos equiláteros de lado ℓ y cinco aristas, ~~también~~ iguales a ℓ, cuyos extremos forman a su vez un pentágono regular también de lado ℓ.

El radio m de la circunferencia circunscrita a este último pentágono regular, nos enseña la Geometría métrica tiene el valor

$$m = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\;\ell$$

valor que sustituido en [1] (ver párrafo 9.1) nos da

$$a = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - m^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell\right)^2}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,\ell = 0{,}95\ 10\ 57\ldots\,\ell \qquad [57]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell\right)^2}} = \frac{\ell^2}{2\sqrt{\ell^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}\,\ell^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}}}\,\ell =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}\,\ell = \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}{2\times\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,\ell = \frac{5\times\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}{5-\sqrt{5}}\,\ell = \frac{5\times\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\times(5+\sqrt{5})}{20}\,\ell$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}\times(5+\sqrt{5})^2}}{4}\,\ell = \frac{\sqrt{\frac{20}{10}\times(5+\sqrt{5})}}{4}\,\ell = \boxed{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,\ell}$$

14.22 Cálculo del radio "b" de la esfera tangente a las aristas del icosaedro regular, en función de su arista "l"

Según la fórmula [3] deducida en el párrafo 9.1, y la [57] del párrafo 14.21, tendremos

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\,l = 0{,}80\,90\,17\ldots l \qquad [58]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{4}}\;l = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}-4}{16}}\;l =$$

$$= \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}\,l\;;$$ pero siendo $6^2 - (2\sqrt{5})^2 = 16 = 4^2$ (ver nota párrafo 13.21), sigue

$$b = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}\,l = \frac{\sqrt{\frac{6+4}{2}} + \sqrt{\frac{6-4}{2}}}{4}\,l = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{4}\,l}$$

14.23 Cálculo del radio "c" de la esfera inscrita en el icosaedro regular, en función de su arista "l"

Para ello calculemos previamente el radio $\widehat{d}$ de la circunferencia circunscrita a una cara, que siendo un triángulo equilátero, valdrá:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{3}\,l = 0{,}57\,73\,50\ldots l = [1,\ \widehat{1,2}]\;l \qquad [59]$$

valor que sustituido en la fórmula [2] del párrafo 9.1, nos da, junto con el de $\widehat{a}$ del párrafo 14.21

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,l\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,l\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\,l = 0.75\,57\,61\ldots\,l \quad [60]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,l\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,l\right)^2} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{3}}\;l = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{3}}\;l =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}-8}{24}}\;l = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{24}}\;l = \frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{2\sqrt{6}}$$; pero siendo

$7^2 - (3\sqrt{5})^2 = 49 - 45 = 4 = 2^2$ (ver párrafo 13.21), se sigue que

$$c = \frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{2\sqrt{6}}\,l = \frac{\sqrt{\frac{7+2}{2}} + \sqrt{\frac{7-2}{2}}}{2\sqrt{6}}\,l = \frac{\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{6}}\,l = \frac{\left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)\times\sqrt{6}}{12}\,l =$$

$$= \frac{\sqrt{27}+\sqrt{15}}{12}\,l = \boxed{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\,l}$$

14.24 Cálculo del ángulo "2φ" del diedro formado por dos caras contiguas del icosaedro regular

Para el cálculo del diedro $2\widehat{\varphi}$ formado por dos caras contiguas, aplicaremos directamente la fórmula [4], deducida en el párrafo 9.1, función de las magnitudes $\overline{b}$ y $\widehat{c}$ obtenidas en 14.22 y 14.23 respectivamente

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{c}{b} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\,l : \frac{1+\sqrt{5}}{4}\,l = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6} = 0,93\,41\,72\ldots$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\,l : \frac{1+\sqrt{5}}{4}\,l = \frac{(3\sqrt{3}+\sqrt{15})\times 4}{(1+\sqrt{5})\times 12} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{3+3\sqrt{5}} = \frac{(3\sqrt{3}+\sqrt{15})\times(3-3\sqrt{5})}{-36} =$$

$$= \frac{(3\sqrt{3}+\sqrt{15})\times(3\sqrt{5}-3)}{36} = \frac{9\sqrt{15}+3\sqrt{15\times 5}-9\sqrt{3}-3\sqrt{15}}{36} =$$

$$= \frac{9\sqrt{15}+15\sqrt{3}-9\sqrt{3}-3\sqrt{15}}{36} = \frac{6\sqrt{15}+6\sqrt{3}}{36} = \boxed{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}}$$

de cuyo valor se deduce $\varphi = 69^\circ\ 5'\ 41,4''$

de donde $2\varphi = 138^\circ\ 11'\ 22,8''$ [61]

El desarrollo del cálculo logarítmico es el siguiente:

$\text{sen}\ \varphi = 0,93\ 41\ 72\ 4$ $\log \text{sen}\ \varphi = \bar{1},970\ 42\ 70$

$$\text{sen}\ \varphi = 69^\circ\ 5'\ 41,4''$$

Como valores complementarios que utilizaremos en cálculos posteriores, tenemos:

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\text{sen}^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{15+3+2\sqrt{45}}{36}} = \sqrt{1-\frac{18+2\sqrt{45}}{36}} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{18+6\sqrt{5}}{36}} = \sqrt{\frac{36-18-6\sqrt{5}}{36}} = \frac{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}{6},$$ pero siendo

$18^2-(6\sqrt{5})^2 = 324-180 = 144 = 12^2$ (ver párrafo 13.21) se sigue que

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}{6} = \frac{\sqrt{\frac{18+12}{2}}-\sqrt{\frac{18-12}{2}}}{6} = \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}}$$

y $\text{sen}\ 2\varphi = 2\ \text{sen}\ \varphi \cos\varphi = 2\times\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\times\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6} = \frac{15-3}{18} = \frac{2}{3}$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

14.3 Cálculo de las magnitudes especiales del icosaedro regular, en función de su arista "l"

Dentro de este grupo estudiaremos las magnitudes siguientes:

14.31 Cálculo del radio "e" de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular de lado "l"

La Geometría métrica nos enseña que

$$e = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\, l = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l = 0{,}85\,06\,51\ldots\, l \qquad [62]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$e = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\, l = \frac{2\times\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10-2\sqrt{5}}\, l = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5-\sqrt{5}}\, l = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\times(5+\sqrt{5})}{20}\, l$$

$$= \frac{\sqrt{2\times(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})^2}}{20}\, l = \frac{\sqrt{2\times 20\times(5+\sqrt{5})}}{20}\, l = \sqrt{\frac{40\times(5+\sqrt{5})}{400}}\, l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l}$$

14.32 Cálculo de la apotema "h" de un pentágono regular de lado "l"

La Geometría métrica nos enseña que

$$h = \sqrt{e^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l = 0.68\,81\,91\ldots\, l \qquad [63]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$h = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{4}}\, l = \sqrt{\frac{20+4\sqrt{5}-10}{40}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{10+4\sqrt{5}}{40}}\, l = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l}$$

14.33 Cálculo de la magnitud "g" en las vistas "I" y "III"

En la figura 37 y en sus vistas I y II puede deducirse que la altura $\widehat{g}$ es un cateto de un triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa el lado $\widehat{l}$ y el otro cateto, conocido, la magnitud $\widehat{e}$ (ver fórmula [62]); por consiguiente:

$$g = \sqrt{l^2 - e^2} = \sqrt{l^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l = 0,52\,57\,31 \ldots l \quad [64]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$g = \sqrt{l^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l = \sqrt{\frac{10-5-\sqrt{5}}{10}}\, l = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l}$$

14.34 Cálculo de la magnitud "f" en las vistas "I" y "III"

Refiriéndonos a la figura 37, podemos observar en la vista $\widehat{I}$ que la cota $\widehat{f}$, en función de $\widehat{a}$ y $\widehat{g}$, tiene la siguiente relación:

$$2a = 2g + f \qquad \text{de donde} \quad f = 2(a-g), \text{ o sea}$$

$$f = 2 \times \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, l - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l = 0,85\,06\,51 \ldots l \quad [65]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$f = 2 \times \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, l - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l\right) = \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} - \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})\times 4}{10}}\right) l =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}} - \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\right) l = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4} + \frac{10-2\sqrt{5}}{5} - 2\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4} \times \frac{10-2\sqrt{5}}{5}}}\; l =$$

$$= \sqrt{\frac{50+10\sqrt{5}+40-8\sqrt{5}}{20} - 2\sqrt{\frac{100-20}{20}}}\; l = \sqrt{\frac{90+2\sqrt{5}}{20} - 4}\; l = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{20}}\; l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l}$$

14.35 Cálculo de la magnitud "i", lado del decágono regular del contorno de la vista "II"

La Geometría métrica nos enseña que el lado l_{10} de un decágono regular, en función del radio r de la circunferencia circunscrita, tiene el valor

$$l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, r$$

siendo en nuestro caso $l_{10} = i$ $r = e$ tendremos

$$i = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; l = 0,52\,57\,31\ldots l \qquad [66]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$i = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}\; l = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{5+1-2\sqrt{5}}{4}}\; l =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{40}}\; l = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}}\; l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{20}}\; l =$$

$$= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{20}}\; l = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; l}$$

14.36 Cálculo de la apotema "k" de una cara del icosaedro regular, en función de su arista "l"

La apotema $\hat{k}$ de una cara es la de un triángulo equilátero de lado $\hat{l}$; el centro de la circunferencia circunscrita al mismo se encuentra a una distancia de dicho lado $\bar{l}$ igual al tercio de la altura del triángulo; por consiguiente su valor será:

$$k = \frac{1}{3}\sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\, l = 0{,}28\ 86\ 75 \ldots\, l \qquad [67]$$

14.37 Relaciones importantes entre las magnitudes calculadas del icosaedro regular.

De las fórmulas [64] y [66] se deduce $g = i$ [68]

De las fórmulas [67] y [59] se deduce $2k = d$ [69]

De las fórmulas [62] y [65] se deduce $e = f$ [70]

De las fórmulas [64], [65] y [63], se deduce $g + f = 2h$ [71]

ya que $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l = 2 \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l$

La comprobación de la anterior igualdad, es la siguiente:

$$\boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l} = \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} + 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} \times \frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right) l^2} =$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{20}{100}}}\; l = \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{10} \times 2}\; l = \sqrt{1 + \frac{4\sqrt{5}}{10}}\; l = \sqrt{1 + \frac{8\sqrt{5}}{20}}\; l =$$

$$= \sqrt{\frac{20 + 8\sqrt{5}}{20}}\, l = \boxed{2 \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l}$$

14.38 Cálculo de la superficie "S" del icosaedro regular, en función de su arista "l"

El área S_1 de una cara, será la de un triángulo equilátero de lado l, y su valor

$$S_1 = \frac{l}{2}\sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

El área total S, será igual a

$$S = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = 5\sqrt{3}\, l^2 = 8{,}66\,02\,54\ldots\, l^2 \qquad [72]$$

14.39 Cálculo del volumen "V" del icosaedro regular, en función de su arista "l"

Si unimos los vértices de una cara con el centro del poliedro regular, obtendremos una pirámide regular, cuya base es dicha cara, y su altura el radio r de la esfera inscrita; su volumen V_1 valdrá:

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1\, r = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \times \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} l = \frac{3 + \sqrt{5}}{48} l^3$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \times \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} l = \frac{\sqrt{3} \times (3\sqrt{3} + \sqrt{15})}{12^2} l^3 = \frac{9 + \sqrt{45}}{12^2} l^3 =$$

$$= \frac{9 + 3\sqrt{5}}{12^2} l^3 = \boxed{\frac{3 + \sqrt{5}}{48} l^3}$$

y el volumen total V, será igual a

$$V = 20 \times \frac{3 + \sqrt{5}}{48} l^3 = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} l^3 = 2{,}18\,16\,95\ldots\, l^3 \qquad [73]$$

UNE A4 210 X 297

Págs.

137 al 135

14.4 Resumen del cálculo de magnitudes del icosaedro regular, en función de la arista "l" del mismo.

A continuación exponemos en forma tabulada los resultados de los cálculos desarrollados en los párrafos 14.21 a 14.24 y 14.31 a 14.39, cuya nomenclatura es la siguiente:

a Radio de la esfera circunscrita (párrafo 14.21, fórmula 57)

b Radio de la esfera tangente a las aristas (párrafo 14,22 fórmula 58)

c Radio de la esfera inscrita (párrafo 14.23, fórmula 60)

d Radio de la circunferencia circunscrita a una cara (párrafo 14.23, fórmula 59)

2φ Ángulo del diedro (párrafo 14.24, fórmula 61)

e Radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular de lado $\widehat{l}$ y también al decágono regular de lado $\widehat{i}$, contorno de la vista $\widehat{II}$ (párrafo 14.31, fórmula 62)

f Altura intermedia del contorno de las vistas $\widehat{I}$ y $\widehat{III}$ (párrafo 14.34, fórmula 65)

g Alturas extremas del contorno de las vistas $\widehat{I}$ y $\widehat{III}$ (párrafo 14.33, fórmula 64)

h Apotema de un pentágono regular de lado $\overline{l}$ (párrafo 14.32, fórmula 63)

i Lado del decágono regular contorno de la vista $\overline{II}$ (párrafo 14.35, fórmula 66)

k Apotema de una cara (párrafo 14.36, fórmula 67)

Relaciones entre magnitudes (párrafo 14.37, fórmulas 68, 69, 70, 71)

S Superficie (párrafo 14.38, fórmula 72)

V Volumen (párrafo 14.39, fórmula 73)

UNE A4 210 X 297

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,\ell$	$0,95\ 10\ 57\ldots\ \ell$
b	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}\,\ell$	$0,80\ 90\ 17\ldots\ \ell$
c	$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\,\ell$	$0,75\ 57\ 61\ldots\ \ell$
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell$	$0,57\ 73\ 50\ldots\ \ell$
2φ	$\text{sen}\ \varphi = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$	$0,93\ 41\ 72\ldots$ $2\varphi = 138^\circ\ 11'\ 22,8''$
e	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$0,85\ 06\ 51\ldots\ \ell$
f	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$0,85\ 06\ 51\ldots\ \ell$
g	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$0,52\ 57\ 31\ldots\ \ell$
h	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,\ell$	$0,68\ 81\ 91\ldots\ \ell$
i	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,\ell$	$0,52\ 57\ 31\ldots\ \ell$
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\,\ell$	$0,28\ 86\ 75\ldots\ \ell$
S	$5\sqrt{3}\ \ell^2$	$8,66\ 02\ 54\ldots\ \ell^2$
V	$\frac{15+5\sqrt{5}}{12}\,\ell^3$	$2,18\ 16\ 95\ldots\ \ell^3$

Relaciones entre magnitudes

$g = i \qquad 2k = d \qquad e = f \qquad g + f = 2h$

1 - 10 - 71

14.5 Representación en el sistema diédrico del icosaedro regular de lado "l", por proceso gráfico-analítico.

14.51 Ejercicio de aplicación

ENUNCIADO.- Representar en el sistema diédrico, con tres proyecciones y a escala 1:2,5, un icosaedro regular de 100 mm de arista, de forma tenga un eje (diámetro de la esfera circunscrita) perpendicular al plano II y una de las cinco caras con vértice en un extremo de dicho eje, perpendicular al plano I. El centro O del icosaedro tiene por coordenadas reales O (120, 120, 150) mm.

SOLUCIÓN

Refiriéndonos a la figura 37, efectuaremos las siguientes construcciones y operaciones:

1º Recuadrado del papel A4V (a 5 mm del borde), colocación del cajetín (ver párrafo 16.51) y situación de los ejes coordenados a las distancias marcadas en la figura (100 y 117 mm).

2º Calcular, de acuerdo con el cuadro sinóptico incluido en el párrafo 14.4, las dimensiones en milímetros de las magnitudes a, b, c, d, e, f, g, h, i, k. Los resultados de estas operaciones, con una cifra decimal, son los siguientes: a = 95,1; b = 80,9; c = 75,6; d = 57,7; e = 85,1; f = 85,1; g = 52,6; h = 68,8; i = 52,6; k = 28,9

3º Situar sobre el dibujo en sus tres proyecciones, el centro $\widehat{O}$, de acuerdo con sus coordenadas y escala.

4º Tomando como base las cotas calculadas construir directamente sus proyecciones sobre $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ y $\widehat{III}$, comprobando con sencillas construcciones geométricas los resultados gráficos. (igualdad de divisiones en las circunferencias circunscritas a los polígonos regulares cuyo lado se conoce previamente). Comprobar igualmente la amplitud del ángulo 2φ (con el semicírculo graduado) que se obtiene en su verdadera magnitud en la vista $\widehat{I}$.

5º Numerar sus vértices 1 al 20 en sus tres vistas.

6º Acotar con cifras las dimensiones calculadas.

14.52 Desarrollo del icosaedro regular

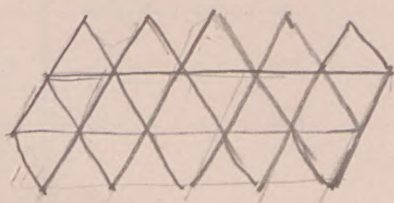


Figura 38

El desarrollo del icosaedro regular (fig. 38) se compone de veinte triángulos equiláteros de lado $\widehat{l}$, colocados contiguamente y numerados sus vértices en el orden que se indica en la figura 38, que se corresponde a su vez con los de las figuras 36 y 37

Cuadro resumen del cálculo de manitudes en los cinco poliedros regulares convexos

1. TETRAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{6}}{4}\ \ell$	0, 61 23 72.... ℓ
b	$\frac{\sqrt{2}}{4}\ \ell$	0, 35 35 53.... ℓ
c	$\frac{\sqrt{6}}{12}\ \ell$	0, 20 41 24.... ℓ
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	0, 57 73 50.... ℓ
2φ	$\text{sen}\ \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0, 57 73 50 $2\varphi = 70^\circ\ 37'\ 43{,}4''$
–	–	–
–	–	–
–	–	–
h	$\frac{\sqrt{6}}{3}\ \ell$	0, 81 64 97.... ℓ
–	–	–
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\ \ell$	0, 28 86 75.... ℓ
S	$\sqrt{3}\ \ell^2$	1, 73 20 51.... ℓ^2
V	$\frac{\sqrt{2}}{12}\ \ell^3$	0, 11 78 51.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$h = a + c$ $\quad h = \frac{4}{3}a$ $\quad h = 4c$ $\quad a = 3c$ $\quad d = 2k$

2. EXAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ell$	0, 86 60 25.... ℓ
b	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	0, 70 71 07.... ℓ
c	$\frac{1}{2}\ \ell$	0, 50 00 00..... ℓ
d	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	0, 70 71 07..... ℓ
2φ	$\text{sen}\ \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	0, 70 71 07..... ℓ $2\varphi = 90^\circ\ 00'\ 00''$
–	–	–
–	–	–
–	–	–
h	$1\ \ell$	1, 00 00 00..... ℓ
–	–	–
k	$\frac{1}{2}\ \ell$	0, 50 00 00.... ℓ
S	$6\ \ell^2$	6, 00 00 00.... ℓ^2
V	$1\ \ell^3$	1, 00 00 00..... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$c = k$ $\quad b = d$ $\quad h = 2c$ $\quad h = 2k$

3. OCTAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell$	0, 70 71 07.... ℓ
b	$\frac{1}{2}\ \ell$	0, 50 00 00..... ℓ
c	$\frac{\sqrt{6}}{6}\ \ell$	0, 40 82 48.... ℓ
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	0, 57 73 50.... ℓ
2φ	$\text{sen}\ \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$	0, 81 64 97..... ℓ $2\varphi = 109^\circ\ 28'\ 16{,}6''$
–	–	–
–	–	–
–	–	–
–	–	–
–	–	–
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\ \ell$	0, 28 86 75..... ℓ
S	$2\sqrt{3}\ \ell^2$	3, 46 41 02.... ℓ^2
V	$\frac{\sqrt{2}}{3}\ \ell^3$	0, 47 14 05.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$d = 2k$ $\quad \ell = 2b$

4. DODECAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\ \ell$	1, 40 12 59.... ℓ
b	$\frac{3 + \sqrt{5}}{4}\ \ell$	1, 30 90 17..... ℓ
c	$\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\ \ell$	1, 11 35 16..... ℓ
d	$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51..... ℓ
2φ	$\text{sen}\ \varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	0, 85 06 51..... ℓ $2\varphi = 116^\circ\ 33'\ 54{,}2''$
e	$\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}\ \ell$	1, 37 63 82..... ℓ
f	$\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 52 57 31..... ℓ
g	$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51..... ℓ
–	–	–
i	$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51.... ℓ
k	$\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}\ \ell$	0, 68 81 91..... ℓ
S	$3 \times \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\ \ell^2$	20, 64 57 29..... ℓ^2
V	$\frac{7\sqrt{5} + 15}{4}\ \ell^3$	7, 66 31 19.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$e = 2k$ $\quad d = g = i$ $\quad g + f = 2k$

5. ICOSAEDRO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\ \ell$	0, 95 10 57.... ℓ
b	$\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\ \ell$	0, 80 90 17.... ℓ
c	$\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}\ \ell$	0, 75 57 61.... ℓ
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	0, 57 73 50.... ℓ
2φ	$\text{sen}\ \varphi = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$	0, 93 41 72.... $2\varphi = 138^\circ\ 11'\ 22{,}8''$
e	$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51.... ℓ
f	$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51.... ℓ
g	$\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 52 57 31.... ℓ
h	$\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}\ \ell$	0, 68 81 91.... ℓ
i	$\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 52 57 31.... ℓ
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\ \ell$	0, 28 86 75.... ℓ
S	$5\sqrt{3}\ \ell^2$	8, 66 02 54.... ℓ^2
V	$\frac{15 + 5\sqrt{5}}{12}\ \ell^3$	2, 18 16 95.... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$g = i$ $\quad 2k = d$ $\quad e = f$ $\quad g + f = 2h$


colorchecker CLASSIC
calibrite
mm